

# グラフとアルゴリズムとプログラムのやさしいおはなし

渡邊敏正

2022年6月10日

第12回 (4月19日付原稿の修正版)

## 1 部分和問題を解いてみよう

第2回で取り上げた部分和問題を解くプログラムの作成を考えましょう。部分和問題は以下で定義されます。

(部分和問題の定義)

(入力)  $(n+1)$  個の正の整数  $a_1, \dots, a_n, b$

(出力) 以下を満たす添字集合  $S_n \subseteq I_n = \{1, \dots, n\}$  が存在するとき YES、そうでないときは NO:

$$\sum_{i \in S_n} a_i = b$$

言い換えますと

与えられた  $n$  個の正整数  $a_1, \dots, a_n$  から適当に何個か選んでそれらの総和が  $b$  になるようにできれば YES、そうでなければ NO と答えなさい

という問題です。

**注意 12.1** 部分和問題の定義は YES、NO を決める決定問題であることに注意してください。条件を満たす部分集合を具体的に求める問題も考えられます。これについては別途考えることにします。

**注意 12.2** 定義における和の記述の仕方としては、

$$\sum_{a_i \in T} a_i = b \text{ かつ } T \subseteq \{a_1, \dots, a_n\}$$

を満たす集合  $T$  が存在するとき、という表現も可能ですが、ここでは添字集合で扱うことにします。後述の例題 12.1 のあとにある説明文も参考にしてください。

### 1.1 例題と総当たり法

まず例題を示して、第2回で説明した総当たり法で解いてみましょう。

### 例題 12.1

(入力)  $n (= 4)$  個の正の整数  $\{a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = 6, a_4 = 5\}$ 、添字集合  $I_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ 、目標値  $b (= 7)$

(出力) 以下を満たす集合  $S_4 \subseteq I_4$  が存在するとき YES；そうでないときは NO:

$$\sum_{i \in S_4} a_i = b (= 7)$$

- この例題について、たとえば  $S_4 = \{1, 2, 3\}$  ならば  $\sum_{i \in S_4} a_i = a_1 + a_2 + a_3 = 11 \neq b$  ですし、 $S_4 = \{2, 4\}$  ならば  $\sum_{i \in S_4} a_i = a_2 + a_4 = 7 = b$  です。したがって、この例題については YES となります。なお、注意 12.2 で言及したように、添字集合  $S_4$  の代わりに  $T = \{a_2, a_4\}$  として  $\sum_{a_i \in T} a_i = a_2 + a_4 = 7 = b$  なる表現も可能ですが、ここでは添字集合による表現に統一しています。
- この例題を総当たり法で解く場合には、以下の表 1 の  $2^4 = 16$  個の部分集合 (この場合は要素の集合で表記しています) について 1 つずつその和をチェックしていきます。例えば、以下の表で空集合から大きな集合へと進めば 10 回目で、全体集合から逆に小さな集合へと進めば 7 回目で、YES が出力されます。ただ、どちらが速いかは開始前には不明で結果はやってみないとわかりません。(チェックする部分集合の順序が変わればまた違ってきます。) 目標値が  $b = 15$  だと、すべての場合をチェックして NO が出力されます。この場合はどちらから進めても同じで最悪のケースです。

表 1 例題についての総当たり法の実行過程の例

No.	部分集合	和	No.	部分集合	和
0	$\emptyset$	0	8	$\{2, 6\}$	8
1	$\{3\}$	3	9	$\{2, 5\}$	7
2	$\{2\}$	2	10	$\{6, 5\}$	11
3	$\{6\}$	6	11	$\{3, 2, 6\}$	11
4	$\{5\}$	5	12	$\{3, 2, 5\}$	10
5	$\{3, 2\}$	5	13	$\{3, 6, 5\}$	14
6	$\{3, 6\}$	9	14	$\{2, 6, 5\}$	13
7	$\{3, 5\}$	8	15	$\{3, 2, 6, 5\}$	16

- これも一つの解法ですが、今回は総当たり法よりは効率の良い解法を示し、さらにこの解法を実行する C 言語プログラムを作成することを目指します。最悪の場合は総当たり法と同等になりますが、総当たり法より速く YES、NO を判定するケースが多くなります。
- プログラム作成の前に、まずこの問題を解くアルゴリズムを設計し、そのアルゴリズムが部分和问题を正しく解くこと (正当性) を示さなければなりません。これらを通過した後で C 言語によってプログラム作成をすることになります。
- アルゴリズムの設計と正当性の証明ですが、まず例題 12.1 でこのステップを説明します。これで皆さんにある程度理解していただいて、その後で一般的なアルゴリズムの設計と正当性の証明に進むことにします。

## 1.2 論理変数 $P(w, m)$ の定義導入

部分問題を解くために論理変数を定義導入して、アルゴリズム設計の準備をします。論理変数の意味や導入目的、解法の設計での使い方についての説明は、皆さんが理解しやすいように上述の例題 12.1 の沿った形で記述しますが、一般的な場合にそのまま適用できます。

### 1.2.1 論理変数 $P(w, m)$ とその導入目的

- この問題を解くために 1 または 0 のいずれかの値をとる論理変数  $P(w, m)$  を考えます。ここで、 $I_m = \{1, \dots, m\}$  ( $1 \leq m \leq n$ ) とします。なお、この論理変数は  $0 \leq w \leq b (= 7)$  および  $1 \leq m \leq n (= 4)$  なる  $w$  および  $m$  すべてについて考えるのが基本ですが、議論の都合上、 $w < 0$  の場合も含めます。すなわち、

$w < 0$  の場合は、 $P(w, m) = 0$  ( $1 \leq m \leq n (= 4)$  なる整数  $m$  について)

と設定します。

- 論理変数  $P(w, m)$  導入の意図になりますが、以下の  $\implies$  左側の命題 (添字集合  $S_m$  が存在するか否か) を簡潔に表現することが目的の 1 つです (「ならば」を  $\implies$  と表記します) :

( $w \leq b (= 7)$  および  $1 \leq m \leq n (= 4)$  なるすべての  $w$  および  $m$  について)

$$(a) \quad \sum_{i \in S_m} a_i = w \text{ を満たす添字集合 } S_m \subseteq I_m \text{ が存在する} \implies P(w, m) = 1$$

$$(b) \quad \sum_{i \in S_m} a_i = w \text{ を満たす添字集合 } S_m \subseteq I_m \text{ が存在しない} \implies P(w, m) = 0$$

- 例題 12.1 については、たとえば  $S_3 = \{1, 2\} \subseteq I_3$  に対して  $\sum_{i \in S_3} a_i = a_1 + a_2 = 3 + 2 = 5$  が成り立ちますので  $P(5, 3) = 1$ 、あるいは  $S_4 = \{2, 4\} \subseteq I_4$  に対して  $\sum_{i \in S_4} a_i = a_2 + a_4 = 7 = b$  が成り立ちますので  $P(7, 4) = 1$  なる表現になります。
- まず、目標値、添字集合、論理変数の値を表 2 にまとめておきます。そのあと補足説明をします。

表 2 目標値、添字集合、論理変数と値のまとめ

目標値	$\sum_{i \in S_m} a_i = w$ を満たす $S_m \subseteq I_m$	論理変数の値
$w \geq 0$	存在する $\implies$	$P(w, m) = 1$
	存在しない $\implies$	$P(w, m) = 0$
$w < 0$	存在しない	$P(w, m) = 0$

**注意 12.3 目標値  $w < 0$  の場合**を考えます。 $a_i > 0 (i \in I_n)$  ですから、 $\sum_{i \in S_m} a_i = w$  を満たす  $S_m \subseteq I_m$  は存在しません。また、 $P(w, m) = 0$  と設定しています。したがって、(a)、(b) **がともに成り立ちます**。ここで、(b) が成り立っていることは理解できると思いますが、”(a) が成り立っている”ということに疑問を持つ方がいるかもしれません。条件を満たす  $S_m$  が存在することとを  $A$ 、 $P(w, m) = 1$  を  $B$  と略記しますと、(a) は  $A \implies B$  の形の命題となりますが、このような命題は含意命題 (implication) と呼ばれます。詳細は第 14 回に譲りますが、

$$(A \implies B) \iff (\neg A \vee B)$$

なる関係がありますので、 $A$  が成り立たない ( $\neg A$  が真である) 場合に含意命題  $A \implies B$  自体は成り立ちます。すなわち (a) が成り立ちます。

- 注意 12.3 により、以後は特に断らない限り、目標値  $w \geq 0$  として (a)、(b) が成り立つか否かについて考えていきます。なお、目標値は  $w$  と表記されるだけでなく  $w - a_m$  などの形で現れることもあります。このときも  $w - a_m \geq 0$  として考えます。また以後、 $w < 0$  の場合に (a)、(b) がともに成り立つことは断りなしに使います。
- ここで (b) が成り立っているとします。この対偶命題を考えると、

(b) の対偶：  $P(w, m) = 1 \implies \sum_{i \in S_m} a_i = w$  を満たす添字集合  $S_m \subseteq I_m$  が存在する  
が成り立ちます。

- (a) と (b) がともに成り立っているとしますと、(b) の対偶と (a) を合わせれば

(c)  $\sum_{i \in S_m} a_i = w$  を満たす添字集合  $S_m \subseteq I_m$  が存在する  $\iff P(w, m) = 1$   
が成り立ちます\*1。

- 同様に、(a) の対偶を考えて (b) と合わせれば

(d)  $\sum_{i \in S_m} a_i = w$  を満たす添字集合  $S_m \subseteq I_m$  が存在しない  $\iff P(w, m) = 0$   
が成り立ちます。

- 見かけは違いますが (c) と (d) は同じことを述べています。(c) (あるいは (d)) によって、 $\sum_{i \in S_m} a_i = w$  を満たす  $S_m \subseteq I_m$  が存在するか否かの判定と  $P(w, m)$  が 1 か 0 かの判定が同じことになります。

### 1.2.2 例題 12.1 の解法に向けて

- 上述の通り、論理変数  $P(w, m)$  の導入目的は条件を満たす集合  $S_m$  が存在するか否かを  $P(w, m)$  が 1 か 0 かで判断できるようにする、ということです。
- ただし、これはあくまで定義の話、導入の目的です。これにより正確な判定ができることを証明する必要があります。そのために、ここから

**$P(w, m)$  が正しく計算されている (あるいは、 $P(w, m)$  は正しく計算される)**  
という表現を使うことにします。この意味は以下の**命題 (a) (b) が共に成り立つこと**とします。

$$(a) \quad \sum_{i \in S_m} a_i = w \text{ を満たす添字集合 } S_m \subseteq I_m \text{ が存在する} \implies P(w, m) = 1$$

$$(b) \quad \sum_{i \in S_m} a_i = w \text{ を満たす添字集合 } S_m \subseteq I_m \text{ が存在しない} \implies P(w, m) = 0$$

- これらは  $\implies$  の前後を入れ替えた以下の対偶命題が成り立つことと同じことで、必要に応じて選択して使います。

$$(b) \text{ の対偶： } P(w, m) = 1 \implies \sum_{i \in S_m} a_i = w \text{ を満たす添字集合 } S_m \subseteq I_m \text{ が存在する}$$

$$(a) \text{ の対偶： } P(w, m) = 0 \implies \sum_{i \in S_m} a_i = w \text{ を満たす添字集合 } S_m \subseteq I_m \text{ が存在しない}$$

- 部分和问题を解くには「 **$P(b, n)$  が正しく計算されている**」ことがポイントになります。例題 12.1 について言えば、 $P(7, 4)$  ( $w = 7, m = n = 4$ ) が正しく計算されているとすると

$$P(7, 4) = 1 \iff \sum_{i \in S_4} a_i = 7 \geq 0 \text{ を満たす } S_4 \subseteq I_4 = \{1, \dots, 4\} \text{ が存在する}$$

\*1  $\iff$  は左側が成り立てば右側が成り立ち、かつ右側が成り立てば左側が成り立つことを表します。

ですので、

$$P(7,4) = 1 \text{ ならば YES} \quad P(7,4) = 0 \text{ ならば NO}$$

を出力すればこの例題を解いたことになります。

- 論理変数  $P(w, m)$  の導入によって、 $\sum_{i \in S_n} a_i = b$  を満たす添字集合  $S_n \subseteq I_n$  が存在するか否かの判定問題を  $P(n, b)$  の値が 1 か 0 かで判定する問題に置き換えて解こうとしているということです。

### 1.3 漸化式による例題 12.1 の解法

#### 1.3.1 初期値設定と論理式

「 $P(b, n)$  ( $b = 7, n = 4$ ) は正しく計算される」ことを示すために  $P(w, m)$  について以下の初期値設定と論理式を考えます。

- $w < 0$  のとき

$$P(w, m) = 0 \quad (1 \leq m \leq n (= 4) \text{ なるすべての整数 } m \text{ について})$$

- $m = 1$  のとき

$$P(0, 1) = 1, P(a_1, 1) = 1 \quad (\text{例題 12.1 では、} a_1 = 3)$$

$$P(w, 1) = 0 \quad (1 \leq w \leq b (= 7) \text{ かつ } w \neq a_1 \text{ なるすべての整数 } w \text{ について})$$

- $2 \leq m \leq n (= 4)$  のとき

$$P(w, m) = P(w, m-1) \vee P(w - a_m, m-1) \quad (0 \leq w \leq b (= 7) \text{ なるすべての整数 } w \text{ について})$$

(ここで、 $\vee$  は「または」を表す)

#### 1.3.2 論理変数、論理式および添字集合について

$2 \leq m \leq n$  のときの論理変数、論理式および添字集合の関係を説明しておきます。

- $P(w, m) = P(w, m-1) \vee P(w - a_m, m-1) = 1$  が意味するのは

$$P(w, m-1) = 1 \text{ (したがって、} w \geq 0 \text{) である}$$

または

$$P(w - a_m, m-1) = 1 \text{ (したがって、} w \geq a_m \text{) である}$$

が成り立つことです。

- つまり、

$$\sum_{i \in S_m} a_i = w \text{ を満たす } S_m \subseteq I_m \text{ が存在する}$$

ということは

$$\sum_{i \in S_{m-1}} a_i = w \text{ を満たす } S_{m-1} \subseteq I_{m-1} (\subseteq I_m) \text{ が存在する}$$

( $S_m \leftarrow S_{m-1}$  と考えればよい)

あるいは

$$\sum_{i \in S_{m-1}} a_i = w - a_m \text{ を満たす } S_{m-1} \subseteq I_{m-1} \text{ が存在する}$$

( $S_m \leftarrow S_{m-1} \cup \{m\}$  と考えればよい)

のどちらかが成り立つことと同じであるということです。

- 一方、 $w \geq 0$  の場合に、 $P(w, m) = 0$  が意味するのは以下が成り立つことです。

$$P(w, m-1) = 0 \quad \text{かつ} \quad P(w - a_m, m-1) = 0$$

- つまり、

$$\sum_{i \in S_m} a_i = w \text{ を満たす } S_m \subseteq I_m \text{ が存在しない}$$

ということは

$$\sum_{i \in S_{m-1}} a_i = w \text{ を満たす } S_{m-1} \subseteq I_{m-1} \text{ が存在しない}$$

および

$$\sum_{i \in S_{m-1}} a_i = w - a_m \text{ を満たす } S_{m-1} \subseteq I_{m-1} \text{ が存在しない}$$

の両方が成り立つことと同じであるということです。

### 1.3.3 漸化式とアルゴリズム

上記の初期値設定と論理式により次のことが予想できます。

- $m = 1$  のときに  $P(w, 1)$  の値が  $w \leq b = 7$  なるすべての  $w$  について決まりますので、 $m = 2$  の場合の論理式  $P(w, 2) = P(w, 1) \vee P(w - a_2, 1)$  を使って  $P(w, 2)$  の値が計算できます ( $w \leq b = 7$  なるすべての整数  $w$  について)。
- これらを利用して、再び  $m = 3$  の場合の論理式  $P(w, 3) = P(w, 2) \vee P(w - a_3, 2)$  を使って  $P(w, 3)$  の値が計算できます ( $w \leq b = 7$  なるすべての整数  $w$  について)。
- 同様に、 $m = 4, \dots$  についても  $P(w, m - 1)$  が  $w \leq b = 7$  なるすべての  $w$  について計算済みであれば  $P(w, m)$  の値が計算できます。
- このような形式を**漸化式** (recurrence formula; recursion) といいます。この漸化式は  $P(b, n)$  (ここでは、 $b = 7, n = 4$ ) の値を計算するための1つのアルゴリズムになっています。
- したがって、漸化式で計算された  $P(w, m)$  の値1, 0と、 $\sum_{i \in S_m} a_i = w$  を満たす添字集合  $S_m \subseteq I_m$  が存在する、しないが正確に対応していることを示すことが正当性のポイントです。
- すなわち、上記の漸化式を部分和問題を解くアルゴリズムとしてみた場合の正当性は、 $w \leq b (= 7), 1 \leq m \leq n (= 4)$  なるすべての整数  $w, m$  について以下を証明することになります：

$P(w, m)$  は正しく計算される

**注意 12.4** 漸化式  $P(w, m) = P(w, m - 1) \vee P(w - a_m, m - 1)$  についての補足です。

1. いま  $P(w, m - 1)$  が正しく計算されており、かつ  $P(w, m - 1) = 1$  (したがって、 $w \geq 0$ ) とします。このとき、 $P(w, m) = 1$  です。
2.  $P(w, m - 1) = 1$  ならば  $\sum_{i \in S_{m-1}} a_i = w$  を満たす  $S_{m-1} \subseteq I_{m-1}$  が存在します。  $S_{m-1} \subseteq I_m$  ですから、 $S_m \leftarrow S_{m-1}$  とすれば  $\sum_{i \in S_m} a_i = w \geq 0$  を満たす  $S_m \subseteq I_m$  が存在することになります。
3. したがって、 $P(w, m) = 1$  と  $S_m \subseteq I_m$  の存在が対応していることになります。このことから、 $P(w, m) = 1$  が正しく計算されているか否かの判定は、 $P(w, m - 1) = 0$  かつ  $P(w - a_m, m - 1) = 1$  の場合のみを考えればよいことになり、 $P(w, m - 1) = 1$  の場合が省略できて判定操作の効率がよくなくなります。
4. 明らかなことですが、 $P(w, m - 1) = 0$  の場合については、 $P(w - a_m, m - 1) = 0$  なる条件の下で  $P(w, m) = 0$  と  $S_m \subseteq I_m$  が存在しないことが対応しているかを考えることになります。

上述の漸化式に基づいて次の命題が成り立つことを証明できます。

**命題 12.1**  $w \leq b$ ,  $1 \leq m \leq n$  なるすべての整数  $w, m$  について  $P(w, m)$  は正しく計算される。

この命題の証明については、後述の 1.5 と 1.6 にまとめています。1.5 では例題 12.1 に関して漸化式の正当性を示しています。続いて 1.6 で一般的な場合について漸化式の正当性を数学的帰納法で証明します。いずれも数学的色彩の濃い内容になります。このような話が苦手な方、あるいは手っ取り早く結論のみ知っておけば十分とお考えの方は命題 12.1 が成り立つことを前提にして、1.4 の「 $P(w, m)$  に対する漸化式に基づいた C 言語プログラムの作成」に取り組んでください。1.5 と 1.6 はスキップしていただいて差し支えありません。なお、1.5 は例題 12.1 を使って正当性の証明をしていますので、 $m = 1$  から  $m = 3$  にかけての説明を少し見ていただくと 1.6 の一般的な場合の証明方法のイメージをつかむことの助けになると思います。

## 1.4 $P(w, m)$ に対する漸化式に基づいた C 言語プログラムの作成

ここで部分和问题の定義、解法に向けて導入した論理変数  $P(w, m)$  の値、0 または 1、を計算するための漸化式を再掲しておきます。

### 部分和问题

(入力)  $n$  個の正の整数の集合  $\{a_1, \dots, a_n\}$ , 目標値  $b$

(出力) 以下を満たす添字集合  $S_n \subseteq I_n = \{1, \dots, n\}$  が存在するとき YES ; そうでないときは NO :

$$\sum_{i \in S_n} a_i = b$$

**論理変数**  $P(w, m)$  ( $w \leq b$  および  $1 \leq m \leq n$  なる  $w$  および  $m$  について)

$$P(w, m) = 1 \iff \sum_{i \in S_m} a_i = w \text{ を満たす添字集合 } S_m \subseteq I_m \text{ が存在する}$$

$P(w, m)$  に対する漸化式 (初期値設定と論理式)

( $w < 0$  のとき)

$$P(w, m) = 0 \text{ (} 1 \leq m \leq n \text{ なるすべての整数 } m \text{ について)}$$

( $m = 1$  のとき)

$$P(0, 1) = 1, P(a_1, 1) = 1$$

$$P(w, 1) = 0 \text{ (} 1 \leq w \leq b \text{ かつ } w \neq a_1 \text{ なるすべての整数 } w \text{ について)}$$

( $2 \leq m \leq n$  のとき)

$$P(w, m) = P(w, m-1) \vee P(w - a_m, m-1) \text{ (} 0 \leq w \leq b \text{ なるすべての整数 } w \text{ について)}$$

(ここで、 $\vee$  は「または」を表す)

### 1.4.1 プログラム記述における漸化式の扱い

目標値の  $w$  や  $w - a_m$  が負の場合の扱いに関して、漸化式からわかることですがプログラム記述に直結しますので、一応書いておきます。

- 目標値の  $w$  が負のとき、論理変数は  $P(w, m) = 0$  としてその値の妥当性が確定しています。
- $w \geq 0$  とします。漸化式  $P(w, m) = P(w, m-1) \vee P(w - a_m, m-1)$  における論理変数  $P(w - a_m, m-1)$  の目標値  $w - a_m$  については  $w \geq a_m$  ならば  $w - a_m \geq 0$  です。一方、 $w < a_m$  の場合は  $w - a_m < 0$  で

- すが、このときは  $P(w - a_m, m - 1) = 0$  ですから漸化式によって  $P(w, m) = P(w, m - 1)$  となります。
- すなわち、 $0 \leq w < a_m$  のときは  $P(w, m - 1)$  の値によって、 $a_m \leq w$  のときは  $P(w, m - 1)$  と  $P(w - a_m, m - 1)$  の値によって、それぞれ  $P(w, m)$  の値が決まるということです。
  - 目標値  $w' < 0$  なる  $P(w', m') = 0$  の値が目標値  $w \geq 0$  なる  $P(w, m)$  の値に影響を与えることはありません。また最終的には、 $w \geq 0$  なる  $P(w, m)$  についてその値が 1 が 0 かを判断することになります。したがってプログラムの記述では、 $w \geq 0$  の場合のみを対象として漸化式を扱えばよいこととなります。

#### 1.4.2 C 言語プログラムの記述

まずプログラムを図 129 に示します。なお、行番号は説明用に入れてあります。プログラムに記述するとエラーになります。

操作別に簡単な説明をしておきます。プログラムの行数を減らすために { や } などのカッコを可能な限り省略していることをお断りしておきます。

##### (1) 初期データの格納と宣言 (行番号 1~11)

要素数  $n$  と目標値  $b$  はマクロで記述します：

```
3  #define n 4 // #Elements
4  #define b 7 // Target value
```

また、正の整数の集合は整数型 1 次元配列  $a[n+1]$  ( $a[0]$  は未使用) に格納します。宣言時に要素を設定します。また、 $P(w, m)$  の値を整数型 2 次元配列  $P[b+1][n+1]$  に蓄えます。11 行目は使用する変数の宣言です。

```
8  int a[n+1] = { 0,3,2,6,5 }; // a[0] は未使用
9  // int c[n+1];   ここでの YES, NO の判定では使用しない；次回以降で解を求める際に使用
10 int P[b+1][n+1];
11 int i, w, k, m;
```

##### (2) $P(w, m)$ の初期値設定 (行番号 12~20)

for 文を使って定義通りに記述します。なお、計算処理の都合で  $0 \leq w \leq b$  について  $P[w][0]=0$ ; と設定しておきます。<sup>\*2</sup>

```
12 // 初期値設定
13 for (w = 0; w <= b; w++) {
14     if ( (w==0) || (w == a[1]) )
15         P[w][1] = 1;
16     else
17         P[w][1] = 0; // 0:存在しない 1:存在する
18 }
19 for (w = 0; w <= b; w++)
20     P[w][0] = 0;
```

##### (3) 漸化式の計算 (行番号 21~29)

$0 \leq w \leq b, 2 \leq m \leq n$  なる  $w, m$  について漸化式  $P(w, m) = P(w, m - 1) \vee P(w - a_m, m - 1)$  を for 文の 2 重ループで記述します。

<sup>\*2</sup> この初期値設定をしなくても、`int P[b+1][n+1];` なる宣言によって  $P[0][0] \sim P[b][n]$  の値は 0 に初期化されます。



```

1 // Solving the SUBSET_SUM problem
2 #include <stdio.h>
3 #define n 4 // #Elements
4 #define b 7 // Target value
5
6 int main(void)
7 {
8     int a[n+1] = { 0,3,2,6,5 }; // a[0] は未使用
9     // int c[n+1]; ここでの YES, NO の判定では使用しない; 次回以降で解を求める際に使用
10    int P[b+1][n+1];
11    int i, w, k, m;
12    // 初期値設定
13    for (w = 0; w <= b; w++) {
14        if ( (w==0) || (w == a[1]) )
15            P[w][1] = 1;
16        else
17            P[w][1] = 0; // 0:存在しない 1:存在する
18    }
19    for (w = 0; w <= b; w++)
20        P[w][0] = 0;
21    // 漸化式の計算
22    for (m = 2; m <= n; m++) {
23        for (w = 0; w <= b; w++) {
24            if ((P[w][m - 1] == 1) || ((w - a[m] >= 0) && (P[w - a[m]][m - 1] == 1)))
25                P[w][m] = 1;
26            else
27                P[w][m] = 0;
28        }
29    }
30    // 入力データと計算結果の表示
31    printf("\n***** The SUBSET_SUM problem *****\n#Elements n=%d,
32    Target value b=%d\n", n, b);
33    for (w = 1; w <= n; w++)
34        printf("a[%d]=%d ", w, a[w]);
35    printf("\n\n");
36    for (w = 0; w <= b; w++) {
37        for (m = 1; m <= n; m++)
38            printf("P(%d,%d)=%d ", w, m, P[w][m]);
39        printf("\n");
40    }
41    printf("\nThe answer is ");
42    if (P[b][n] == 1)
43        printf("YES\n");
44    else
45        printf("NO\n");
46    printf("\n");
47    return 0;
48 }

```

図 129 部分和问题を解く C 言語プログラム subsetsum-8.c

- $P(w, m - 1) = 1$  または  $P(w - a_m, m - 1) = 1$  (ただし、 $w - a_m \geq 0$ ) のとき  $P(w, m) = 1$  と設定します。

- それ以外のとき、つまり

$P(w, m - 1) = 0$  かつ  $[w - a_m < 0$  または  $(w - a_m \geq 0$  かつ  $P(w - a_m, m - 1) = 0)]$  のとき  $P(w, m) = 0$  と設定します。この部分は `else` 文で記述しますので、プログラム文としては表現されません。

```

21 // 漸化式の計算
22 for (m = 2; m <= n; m++) {
23     for (w = 0; w <= b; w++) {
24         if ((P[w][m - 1] == 1) || ((w - a[m] >= 0) && (P[w - a[m]][m - 1] == 1)))
25             P[w][m] = 1;
26         else
27             P[w][m] = 0;
28     }
29 }

```

#### (4) データの表示 (行番号 30~45)

はじめにタイトルを

```
***** The SUBSET-SUM Problem *****
```

と表示し、改行後にデータ数  $n$ 、目標値  $b$  を続けて表示して改行します。それから  $n$  個の正の整数  $a_1, \dots, a_n$  を  $a[i]=$ (要素) の形で横一列に表示し改行します。そのあとに以下の形で  $P(w, m)$  の値を表示させます。図 130 などを参照してください。これらを表示したあとで改行し、YES あるいは NO を表示させています。

```

P(0,1)=値 ... P(0,n) = 値 (改行)
      :
P(k,1)=値 ... P(k,n) = 値 (改行)
      :
P(b,1)=値 ... P(b,n) = 値 (改行)

```

なお、現在のプログラムでは  $P(w, m)$  の値を  $0 \leq w \leq b$ ,  $1 \leq m \leq n$  なるすべての整数  $w, m$  について表示していますが、 $b$  あるいは  $n$  が大きいときには表示データ数を制限することも必要になると思います。

#### (5) 例題 12.1 に関する実行結果

例題 12.1 に対する C 言語プログラム `subsetsum-8.c` の実行結果が図 130 で、出力は YES です。解は添字集合としては  $\{2, 4\}$  であり、要素集合として  $\{a_2 = 2, a_4 = 5\}$  です。(ここでは解集合を求めることは要求されていませんが、参考のため記載しています。) 例題 12.1 の目標値を  $b = 11$  に変更した場合の `subsetsum-8.c` の実行結果が図 131 で、出力は YES です。1 つの解は添字集合としては  $\{1, 2, 3\}$  であり、要素集合として  $\{a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = 6\}$  です。なお、添字集合として  $\{3, 4\}$ 、要素集合として  $\{a_3 = 6, a_4 = 5\}$  も  $b = 11$  の場合は解です。例題 12.1 の目標値を  $b = 12$  に変更した場合の `subsetsum-8.c` の実行結果が図 132 で、出力は NO です。

#### (6) 他の例題に関する実行結果

少し複雑な例題に対してプログラムを実行してみましょう。以下の例題です。

```
Toshimasa-no-MacBook-Pro:subset_sum_new watanabe$ gcc -o subsetsum-8 subsetsum-8.c
Toshimasa-no-MacBook-Pro:subset_sum_new watanabe$ ./subsetsum-8
```

```
***** The SUBSET_SUM problem *****
#Elements n=4, Target value b=7
a[1]=3 a[2]=2 a[3]=6 a[4]=5

P(0,1)=1 P(0,2)=1 P(0,3)=1 P(0,4)=1
P(1,1)=0 P(1,2)=0 P(1,3)=0 P(1,4)=0
P(2,1)=0 P(2,2)=1 P(2,3)=1 P(2,4)=1
P(3,1)=1 P(3,2)=1 P(3,3)=1 P(3,4)=1
P(4,1)=0 P(4,2)=0 P(4,3)=0 P(4,4)=0
P(5,1)=0 P(5,2)=1 P(5,3)=1 P(5,4)=1
P(6,1)=0 P(6,2)=0 P(6,3)=1 P(6,4)=1
P(7,1)=0 P(7,2)=0 P(7,3)=0 P(7,4)=1
```

The answer is YES

図 130 例題 12.1 に対する subsetsum-8.c の実行結果

```
Toshimasa-no-MacBook-Pro:subset_sum_new watanabe$ gcc -o subsetsum-8 subsetsum-8.c
Toshimasa-no-MacBook-Pro:subset_sum_new watanabe$ ./subsetsum-8
```

```
***** The SUBSET_SUM problem *****
#Elements n=4, Target value b=11
a[1]=3 a[2]=2 a[3]=6 a[4]=5

P(0,1)=1 P(0,2)=1 P(0,3)=1 P(0,4)=1
P(1,1)=0 P(1,2)=0 P(1,3)=0 P(1,4)=0
P(2,1)=0 P(2,2)=1 P(2,3)=1 P(2,4)=1
P(3,1)=1 P(3,2)=1 P(3,3)=1 P(3,4)=1
P(4,1)=0 P(4,2)=0 P(4,3)=0 P(4,4)=0
P(5,1)=0 P(5,2)=1 P(5,3)=1 P(5,4)=1
P(6,1)=0 P(6,2)=0 P(6,3)=1 P(6,4)=1
P(7,1)=0 P(7,2)=0 P(7,3)=0 P(7,4)=1
P(8,1)=0 P(8,2)=0 P(8,3)=1 P(8,4)=1
P(9,1)=0 P(9,2)=0 P(9,3)=1 P(9,4)=1
P(10,1)=0 P(10,2)=0 P(10,3)=0 P(10,4)=1
P(11,1)=0 P(11,2)=0 P(11,3)=1 P(11,4)=1
```

The answer is YES

図 131 例題 12.1 の目標値を  $b = 11$  に変更した場合の subsetsum-8.c の実行結果

### 例題 12.2 <sup>\*3</sup>

(入力)  $n (= 10)$  個の正の整数

$$\{a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 16, a_4 = 64, a_5 = 256, a_6 = 1040, a_7 = 1041, a_8 = 1093, a_9 =$$

<sup>\*3</sup> 次の本の 951 ページに掲載されている例題です: T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, "Introduction to Algorithms", The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, USA, 1990.

```
Toshimasa-no-MacBook-Pro:subset_sum_new watanabe$ gcc -o subsetsum-8 subsetsum-8.c
Toshimasa-no-MacBook-Pro:subset_sum_new watanabe$ ./subsetsum-8
```

```
***** The SUBSET_SUM problem *****
#Elements n=4, Target value b=12
a[1]=3 a[2]=2 a[3]=6 a[4]=5

P(0,1)=1 P(0,2)=1 P(0,3)=1 P(0,4)=1
P(1,1)=0 P(1,2)=0 P(1,3)=0 P(1,4)=0
P(2,1)=0 P(2,2)=1 P(2,3)=1 P(2,4)=1
P(3,1)=1 P(3,2)=1 P(3,3)=1 P(3,4)=1
P(4,1)=0 P(4,2)=0 P(4,3)=0 P(4,4)=0
P(5,1)=0 P(5,2)=1 P(5,3)=1 P(5,4)=1
P(6,1)=0 P(6,2)=0 P(6,3)=1 P(6,4)=1
P(7,1)=0 P(7,2)=0 P(7,3)=0 P(7,4)=1
P(8,1)=0 P(8,2)=0 P(8,3)=1 P(8,4)=1
P(9,1)=0 P(9,2)=0 P(9,3)=1 P(9,4)=1
P(10,1)=0 P(10,2)=0 P(10,3)=0 P(10,4)=1
P(11,1)=0 P(11,2)=0 P(11,3)=1 P(11,4)=1
P(12,1)=0 P(12,2)=0 P(12,3)=0 P(12,4)=0
```

The answer is NO

図 132 例題 12.1 の目標値を  $b = 12$  に変更した場合の `subsetsum-8.c` の実行結果

1284,  $a_{10} = 1344$  },  
 目標値  $b (= 3754)$   
 (出力) 以下を満たす集合  $S_{10} \subseteq I_{10}$  が存在するとき YES ; そうでないときは NO :

$$\sum_{i \in S_{10}} a_i = b (= 3754)$$

例題 12.2 に関する実行結果は図 133 に示しています。これについては YES が出力されます。解は添字集合としては  $\{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$  であり、要素集合として  $\{a_1 = 1, a_3 = 16, a_4 = 64, a_5 = 256, a_6 = 1040, a_8 = 1093, a_9 = 1284\}$  です。なお、プログラム名は `subsetsum-10.c` に変更しています。ここでは  $b, n$  の値が大きいため  $P(w, m)$  の値の表示は省略するようにプログラムを変更しています。

```
Toshimasa-no-MacBook-Pro:subset_sum_new watanabe$ gcc -o subsetsum-10 subsetsum-10.c
Toshimasa-no-MacBook-Pro:subset_sum_new watanabe$ ./subsetsum-10
```

```
***** The SUBSET_SUM problem *****
#Elements n=10, Target value b=3754
a[1]=1 a[2]=4 a[3]=16 a[4]=64 a[5]=256 a[6]=1040 a[7]=1041 a[8]=1093
a[9]=1284 a[10]=1344
```

The answer is YES

図 133 例題 12.2 に対する `subsetsum-10.c` の実行結果

## 1.5 例題 12.1 に関する $P(w, m)$ に対する漸化式の正当性

ここでは例題 12.1 に関して漸化式の正当性を示します。次の 1.6 で一般的な場合について漸化式の正当性を数学的帰納法で証明しますが、実例に対する証明を通して一般的な証明のイメージ掴んでいただくことが 1.5 を記述した意図です。いずれも数学的色彩の濃い内容になりますので、1.5 と 1.6 をスキップしていただいても差し支えありません。もちろん証明に挑戦してみたい気持ちもあります。

以下に例題 12.1 と  $P(w, m)$  に対する漸化式をもう一度書いておきます。

### 例題 12.1

(入力)

$n (= 4)$  個の正の整数  $\{a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = 6, a_4 = 5\}$ , 添字集合  $I_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ , 目標値  $b (= 7)$

(出力)

以下を満たす添字集合  $S_4 \subseteq I_4$  が存在するとき YES ; そうでないときは NO :

$$\sum_{i \in S_4} a_i = b (= 7)$$

**漸化式** (初期値設定と論理式)

( $w < 0$  のとき)

$$P(w, m) = 0 \quad (1 \leq m \leq n = 4 \text{ なるすべての整数 } m \text{ について})$$

( $m = 1$  のとき)

$$P(0, 1) = 1, \quad P(a_1, 1) = 1 \quad (a_1 = 3)$$

$$P(w, 1) = 0 \quad (1 \leq w \leq b = 7 \text{ かつ } w \neq a_1 \text{ なるすべての整数 } w \text{ について})$$

( $2 \leq m \leq n = 4$  のとき)

$$P(w, m) = P(w, m-1) \vee P(w - a_m, m-1) \quad (0 \leq w \leq b = 7 \text{ なるすべての整数 } w \text{ について})$$

(ここで、 $\vee$  は「または」を表す)

以後、1 組の  $w, m$  に対して「 $P(w, m) = 1$ 」と「 $\sum_{i \in S_m} a_i = w$  を満たす  $S_m \subseteq I_m$  が存在する」が対応していることを「 $P(w, m) = 1$  の値設定は妥当である」、 $P(w, m) = 0$  と「 $\sum_{i \in S_m} a_i = w$  を満たす  $S_m \subseteq I_m$  が存在しない」が対応していることを「 $P(w, m) = 0$  の値設定は妥当である」とそれぞれ表現することにします。また、それぞれの値設定が妥当であることを「 $P(w, m) = 1$  の妥当性」、 $P(w, m) = 0$  の妥当性」と表現することもあります。

$w \leq b (= 7)$ ,  $1 \leq m \leq n (= 4)$  なるすべての整数  $w, m$  について、 $P(w, m)$  が正しく計算されることは  $P(w, m) = 1$  と  $P(w, m) = 0$  の両方の値設定が妥当であることです。

既に何度か言及していることですが、 $w < 0$  の場合には、 $1 \leq m \leq n (= 4)$  なるすべての整数  $m$  について  $P(w, m) = 0$  の値設定は妥当です。したがって、 $0 \leq w \leq b (= 7)$ ,  $1 \leq m \leq n (= 4)$  なるすべての整数  $w, m$  について  $P(w, m) = 1$  と  $P(w, m) = 0$  の両方の値設定が妥当であることをこれから確かめていきます。なお、 $\emptyset$  は空集合を表し、 $I_m = \{1, \dots, m\}$  ( $m \leq n$ ) です。また、 $w < 0$  なる  $P(w, m) = 0$  の妥当性は断りなしに使います。

**注意 12.5** 注意 12.4 の 1~3 で説明していることですが、「妥当性」の視点から再度述べておきます。

- $w \geq 0, m \geq 2$  なる漸化式  $P(w, m) = P(w, m-1) \vee P(w - a_m, m-1)$  において、 $P(w, m-1) = 1$  かつこの値設定が妥当であるとします。
- このとき、 $P(w, m) = 1$  であり、かつこの値設定は妥当です。
- その理由は、 $\sum_{i \in S_{m-1}} a_i = w$  を満たす  $S_{m-1} \subseteq I_{m-1}$  が存在しますし、 $S_{m-1} \subseteq I_m$  ですから  $S_m \leftarrow S_{m-1}$  とすれば  $\sum_{i \in S_m} a_i = w$  を満たす  $S_m \subseteq I_m$  が存在することになるからです。

### 1.5.1 $m = 1$ のとき

1. 探索対象は  $I_1 = \{1\}$  の部分集合で、それらは  $S_1^1 = \emptyset$  と  $S_1^2 = \{1\}$  です。
2.  $S_1^1 = \emptyset$  に対し、 $\sum_{i \in S_1^1} a_i = 0$  であり、 $P(0, 1) = 1$  ( $w = 0, m = 1$ ) です。
3.  $S_1^2 = \{1\}$  に対し、 $\sum_{i \in S_1^2} a_i = a_1 (= 3)$  であり、 $P(3, 1) = 1$  ( $w = a_1 = 3, m = 1$ ) です。
4.  $1 \leq w \leq 7$  かつ  $w \neq a_1$  なる  $w$  に対して、 $\sum_{i \in S} a_i = w$  を満たす  $S \subseteq I_1$  は存在しませんし、 $P(w, 1) = 0$  です。
5. 以上、2 と 3 によって  $P(0, 1) = 1$  と  $P(a_1, 1) = 1$  ( $a_1 = 3$ ) の妥当性が、4 によって  $P(w, 1) = 0$  ( $1 \leq w \leq 7$  かつ  $w \neq a_1$ ) の妥当性がそれぞれ示されています。
6. すなわち、 $m = 1$  のときに ( $w < 0$  の場合も含めて)  $w \leq 7$  なる  $w$  について  $P(w, m)$  は正しく計算されています。
7.  $P(w - a_2, 1)$  ( $a_2 = 2$ ) について ( $P(w, 2)$  の計算で使います) :  $w \leq 1$  のときは、論理変数  $P$  の定義から  $P(w - a_2, 1) = P(w - 2, 1) = 0$  です。
8. 以上、 $P(w, 1), P(w - a_2, 1)$  などの値および対応する添字集合を表 3 の左側 6 列に示します。

### 1.5.2 $m = 2$ のとき

$m = 1$  の結果を利用して、 $m = 2$  の場合にも  $w \leq 7$  なる  $w$  について  $P(w, m)$  が正しく計算されていることを示します。

1. 探索対象は  $I_2 = \{1, 2\}$  の  $4 (= 2^2)$  個の部分集合で、それらは  $S_2^1 = \emptyset, S_2^2 = \{1\}, S_2^3 = \{2\}, S_2^4 = \{1, 2\}$  です。
2.  $P(w, 2) = P(w, 1) \vee P(w - a_2, 1)$  ( $a_2 = 2$ ) です。
3.  $P(w, 1), P(w - a_2, 1)$  ( $w - a_2 = w - 2 \leq 5$ ) はすべて正しく計算されています。
4.  $w \leq 1$  のときは、論理変数  $P$  の定義から  $P(w - a_2, 1) (= P(w - 2, 1)) = 0$  です。(したがって、 $w \leq 1$  ならば  $P(w, 2) = P(w, 1)$  です。)
5.  $P(w, 2)$  の値は表 3 の右から 2 列目になります。なお、

$$\{a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = 6, a_4 = 5\}, n = 4, b = 7; 0 \leq w \leq 7$$

です。

6. 以下、表 3 の右から 2 列目の  $P(w, 2) = 1$  および  $P(w, 2) = 0$  の妥当性を示します。
7.  $P(w, 1) = 1$  (つまり、 $w \in \{0, 3\}$ ) とします。注意 12.4 によって、 $P(w, 2) = 1$  の値設定は妥当です。なお、 $\sum_{i \in S_1} a_i = w$  を満たす具体的な  $S_1 (\subseteq I_1 \subseteq I_2)$  は  $S_1^1 = \emptyset = S_2^1 \subseteq I_2$  と  $S_1^2 = \{1\} = S_2^2 \subseteq I_2$  です。
8.  $P(w, 1) = 0$  (つまり、 $w \in \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$ ) とします。
  - (a)  $P(w - a_2, 1) (= P(w - 2, 1)) = 1$  のとき

表3  $P(w, 1)$ ,  $P(w - a_2, 1)$  および  $P(w, 2) = P(w, 1) \vee P(w - a_2, 1)$  の値

$w$	$P(w, 1)$	$S_1^j (\subseteq I_1)$	$w - a_2$	$P(w - a_2, 1)$	$S_1^j$	$P(w, 2)$	$S_2^j (\subseteq I_2)$
0	1	$\emptyset$	-2	0		1	$\emptyset$
1	0		-1	0		0	
2	0		0	1	$\emptyset$	1	$\emptyset \cup \{2\}$
3	1	$\{1\}$	1	0		1	$\{1\}$
4	0		2	0		0	
5	0		3	1	$\{1\}$	1	$\{1\} \cup \{2\}$
6	0		4	0		0	
7	0		5	0		0	

- $P(w, 2) = 1$  かつ  $w \geq 2$  です。
- 一方、 $m = 1$  の結果から  $w = 2$  または  $w = 5$  です。
- $w = 2$  (つまり  $P(2, 2) = 1$ ) ならば  $P(w - a_2, 1) = P(w - 2, 1) = P(0, 1) = 1$  で、 $S_1^1 = \emptyset \subseteq I_1$  に対して  $\sum_{i \in S_1^1} a_i = 0$  です。このとき  $S_1^1 \cup \{2\} = \{2\} = S_2^3 \subseteq I_2$  に対して  $\sum_{i \in S_2^3} a_i = a_2 = 2$  です。
- $w = 5$  (つまり  $P(5, 2) = 1$ ) ならば  $P(w - a_2, 1) = P(w - 2, 1) = P(3, 1) = 1$  で、 $S_1^2 = \{1\} \subseteq I_1$  に対して  $\sum_{i \in S_1^2} a_i = a_1 = 3$  です。このとき  $S_1^2 \cup \{2\} = \{1, 2\} = S_2^4 \subseteq I_2$  に対して  $\sum_{i \in S_2^4} a_i = a_1 + a_2 = 3 + 2 = 5$  です。

(b)  $P(w - a_2, 1) (= P(w - 2, 1)) = 0$  のとき

- $P(w, 2) = 0$  です。
  - 一方、 $m = 1$  の結果と上述の 7 および 8(a) の結果から  $w \in \{1, 4, 6, 7\}$  です。  $I_2$  の 4 つの部分集合は  $P(w, 2) = 1$  (つまり  $w \in \{0, 2, 3, 5\}$ ) の場合にすべて出現していますので、 $w \in \{1, 4, 6, 7\}$  に対して、 $\sum_{i \in S} a_i = w$  を満たす  $S \subseteq I_2$  は存在しません。
9. 以上、7 と 8(a) によって  $P(w, 2) = 1$  の妥当性が、8(b) によって  $P(w, 2) = 0$  の妥当性がそれぞれ示されています。
10. すなわち、 $m = 2$  のときに ( $w < 0$  の場合も含めて)  $w \leq 7$  なる  $w$  について  $P(w, m)$  は正しく計算されています (表3の右側2列を参照)。

### 1.5.3 $m = 3$ のとき

$m = 2$  の結果を利用して、 $m = 3$  の場合にも  $w \leq 7$  なる  $w$  について  $P(w, m)$  が正しく計算されていることを示します。

1. 探索対象は  $I_3 = \{1, 2, 3\}$  の  $8 (= 2^3)$  個の部分集合で、それらは  $S_3^1 = \emptyset$ ,  $S_3^2 = \{1\}$ ,  $S_3^3 = \{2\}$ ,  $S_3^4 = \{3\}$ ,  $S_3^5 = \{1, 2\}$ ,  $S_3^6 = \{1, 3\}$ ,  $S_3^7 = \{2, 3\}$ ,  $S_3^8 = \{1, 2, 3\}$  です。
2.  $P(w, 3) = P(w, 2) \vee P(w - a_3, 2)$  ( $a_3 = 6$ ) です。
3.  $P(w, 2)$ ,  $P(w - a_3, 2)$  ( $w - a_3 = w - 6 \leq 1$ ) はすべて正しく計算されています。
4.  $0 \leq w \leq 5$  ならば、論理変数  $P$  の定義から  $P(w - a_3, 2) (= P(w - 6, 2)) = 0$  ですので、 $P(w, 3) =$

$P(w, 2)$  です。

5.  $P(w, 3)$  の値は表 4 の右から 2 列目になります。なお、

$$\{a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = 6, a_4 = 5\}, n = 4, b = 7; 0 \leq w \leq 7$$

です。

表 4  $P(w, 3) = P(w, 2) \vee P(w - a_3, 2)$  ( $a_3 = 6$ ) の値

$w$	$P(w, 2)$	$S_2^j (\subseteq I_2)$	$w - a_3$	$P(w - a_3, 2)$	$S_2^j$	$P(w, 3)$	$S_3^j (\subseteq I_3)$
0	1	$\emptyset$	-6	0		1	$\emptyset$
1	0		-5	0		0	
2	1	{2}	-4	0		1	{2}
3	1	{1}	-3	0		1	{1}
4	0		-2	0		0	
5	1	{1, 2}	-1	0		1	{1, 2}
6	0		0	1	$\emptyset$	1	{3}
7	0		1	0		0	

6. 以下、表 4 の右側から 2 列目の  $P(w, 3) = 1$  および  $P(w, 3) = 0$  の妥当性を示します。

7.  $P(w, 2) = 1$  (つまり、 $w \in \{0, 2, 3, 5\}$ ) とします。  $P(w, 3) = 1$  です。注意 12.4 によって  $P(w, 3) = 1$  の値設定は妥当です。なお、 $\sum_{i \in S_2} a_i = w$  を満たす  $S_2 (\subseteq I_2 \subseteq I_3)$  は具体的には  $S_2^1 = \emptyset (= S_3^1)$ 、 $S_2^2 = \{1\} (= S_3^2)$ 、 $S_2^3 = \{2\} (= S_3^3)$ 、 $S_2^4 = \{1, 2\} (= S_3^5)$  です。

8.  $P(w, 2) = 0$  (つまり  $w \in \{1, 4, 6, 7\}$ ) とします。

(a)  $P(w - a_3, 2) (= P(w - 6, 2)) = 1$  のとき

- $P(w, 3) = 1$  かつ  $w = 6$  です。
- 一方、 $m = 2$  の結果から  $P(w - 6, 2) = P(0, 2) = 1$  は正しく計算されており、 $S_2^1 = \emptyset$  に対して  $\sum_{i \in S_2^1} a_i = 0$  です。このとき  $S_2^1 \cup \{3\} = \{3\} = S_3^4 \subseteq I_3$  に対して  $\sum_{i \in S_3^4} a_i = a_3 = 6$  です。

(b)  $P(w - a_3, 2) (= P(w - 6, 2)) = 0$  のとき

- $P(w, 3) = 0$  かつ  $w \in \{1, 4, 7\}$  です。
- ここで、 $\sum_{i \in S_3} a_i = w$  を満たす  $S_3 \subseteq I_3$  が存在すると仮定してみましょう。
- $P(w, 2) = 0$  ですので、 $m = 2$  の結果から  $\sum_{i \in S'} a_i = w$  を満たす  $S' \subseteq I_2$  は存在しません。したがって、 $3 \in S_3$  です。すなわち、 $S_3 - \{3\} \subseteq I_3 - \{3\} = I_2$  であり、 $w \geq a_3$  です。
- このとき  $\sum_{i \in S_3 - \{3\}} a_i = w - a_3 \geq 0$  ですので、 $m = 2$  の結果から  $P(w - a_3, 2) = 1$  となり、これは矛盾です。
- したがって  $w \in \{1, 4, 7\}$  について、 $\sum_{i \in S_3} a_i = w$  を満たす  $S_3 \subseteq I_3$  は存在しません。

9. 以上、7 と 8(a) によって  $P(w, 3) = 1$  の妥当性が、8(b) によって  $P(w, 3) = 0$  の妥当性がそれぞれ示されています。

10. すなわち、 $m = 3$  のときに ( $w < 0$  の場合も含めて)  $w \leq 7$  なる  $w$  について  $P(w, m)$  は正しく計算されています (表 4 の右側 2 列を参照)。



#### 1.5.4 $m = 4$ のとき

$m = 3$  の結果を利用して、 $m = 4$  の場合にも  $w \leq 7$  なる  $w$  について  $P(w, m)$  が正しく計算されていることを示します。

1. 探索対象は以下に示す  $I_4 = \{1, 2, 3, 4\}$  の  $16 (= 2^4)$  個の部分集合です。

$$\begin{aligned} S_4^1 &= \emptyset (= S_3^1), S_4^2 = \{1\} (= S_3^2), S_4^3 = \{2\} (= S_3^3), S_4^4 = \{3\} (= S_3^4), S_4^5 = \{4\}, \\ S_4^6 &= \{1, 2\} (= S_3^5), S_4^7 = \{1, 3\} (= S_3^6), S_4^8 = \{1, 4\}, S_4^9 = \{2, 3\} (= S_3^7), S_4^{10} = \{2, 4\}, \\ S_4^{11} &= \{3, 4\}, S_4^{12} = \{1, 2, 3\} (= S_3^8), S_4^{13} = \{1, 2, 4\}, S_4^{14} = \{1, 3, 4\}, \\ S_4^{15} &= \{2, 3, 4\}, S_4^{16} = \{1, 2, 3, 4\} \end{aligned}$$

2.  $P(w, 4) = P(w, 3) \vee P(w - a_4, 3)$  ( $a_4 = 5$ ) です。

3.  $P(w, 3), P(w - a_4, 3)$  ( $w - a_4 = w - 5 \leq 2$ ) はすべて正しく計算されています。

4.  $0 \leq w \leq 4$  ならば、論理変数  $P$  の定義から  $P(w - a_4, 3) (= P(w - 5, 3)) = 0$  ですので、 $P(w, 4) = P(w, 3)$  です。

5.  $P(w, 4)$  の値は表 5 の右から 2 列目になります。なお、

$$\{a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = 6, a_4 = 5\}, n = 4, b = 7; 0 \leq w \leq 7$$

です。

表 5  $P(w, 4) = P(w, 3) \vee P(w - a_4, 3)$  ( $a_4 = 5$ ) の値

$w$	$P(w, 3)$	$S_3^j (\subseteq I_3)$	$w - a_4$	$P(w - a_4, 3)$	$S_3^j$	$P(w, 4)$	$S_4^j (\subseteq I_4)$
0	1	$\emptyset$	-5	0		1	$\emptyset$
1	0		-4	0		0	
2	1	$\{2\}$	-3	0		1	$\{2\}$
3	1	$\{1\}$	-2	0		1	$\{1\}$
4	0		-1	0		0	
5	1	$\{1, 2\}$	0	1		1	$\{1, 2\}$
6	1	$\{3\}$	1	0		1	$\{3\}$
7	0		2	1	$\{2\}$	1	$\{2, 4\}$

6. 以下、表 5 の右側から 2 列目の  $P(w, 4) = 1$  および  $P(w, 4) = 0$  妥当性を示します。

7.  $P(w, 3) = 1$  (つまり、 $w \in \{0, 2, 3, 5, 6\}$ ) とします。  $P(w, 4) = 1$  です。注意 12.4 によつて  $P(w, 4) = 1$  の値設定は妥当です。なお、 $\sum_{i \in S_3} a_i = w$  を満たす  $S (\subseteq I_3 \subseteq I_4)$  は具体的には  $S_3^1 = \emptyset (= S_4^1)$ 、 $S_3^2 = \{1\} (= S_4^2)$ 、 $S_3^3 = \{2\} (= S_4^3)$ 、 $S_3^4 = \{3\} (= S_4^4)$ 、 $S_3^5 = \{1, 2\} (= S_4^6)$  です。

8.  $P(w, 3) = 0$  (つまり  $w \in \{1, 4, 7\}$ ) とします。

(a)  $P(w - a_4, 3) (= P(w - 5, 3)) = 1$  のとき

- $P(w, 4) = 1$  かつ  $w = 7$  です。

- 一方、 $m = 3$  の結果から  $P(w - 5, 3) = P(2, 3) = 1$  は正しく計算されており、 $S_3^3 = \{2\}$  に対して  $\sum_{i \in S_3^3} a_i = a_2 = 2$  です。このとき  $S_3^3 \cup \{4\} = \{2, 4\} = S_4^{10} \subseteq I_4$  に対して  $\sum_{i \in S_4^{10}} a_i = a_2 + a_4 = 2 + 5 = 7$  です。

(b)  $P(w - a_4, 3) (= P(w - 5, 3)) = 0$  のとき

- $P(w, 4) = 0$  かつ  $w \in \{1, 4\}$  です。
- ここで、 $\sum_{i \in S_4} a_i = w$  を満たす  $S_4 \subseteq I_4$  が存在すると仮定してみましょう。
- $P(w, 3) = 0$  ですので、 $m = 3$  の結果から  $\sum_{i \in S'} a_i = w$  を満たす  $S' \subseteq I_3$  は存在しません。したがって、 $4 \in S_4$  です。すなわち、 $S_4 - \{4\} \subseteq I_4 - \{4\} = I_3$  であり、 $w \geq a_4$  です。
- このとき  $\sum_{i \in S_4 - \{4\}} a_i = w - a_4 \geq 0$  ですので、 $m = 3$  の結果から  $P(w - a_4, 3) = 1$  となり、これは矛盾です。
- したがって  $w \in \{1, 4\}$  について、 $\sum_{i \in S_4} a_i = w$  を満たす  $S_4 \subseteq I_4$  は存在しません。

9. 以上、7 と 8(a) によって  $P(w, 4) = 1$  の妥当性が、8(b) によって  $P(w, 4) = 0$  の妥当性がそれぞれ示されています。
10. すなわち、 $m = 4$  のときに ( $w < 0$  の場合も含めて)  $w \leq 7$  なる  $w$  について  $P(w, m)$  は正しく計算されています (表 5 の右側 2 列を参照)。
11. 表 5 より  $P(7, 4) = 1$  ですので、 $\sum_{i \in S} a_i = 7 (= b)$  を満たす  $S \subseteq I_4$  が存在します。出力は YES です。なお、具体的な解集合は添字集合としては  $S_4^{10} = \{2, 4\} \subseteq I_4$  であり、要素集合としては  $\{a_2, a_4\} = \{2, 5\}$  です。

### 1.5.5 ここまでのまとめ

ここまで例題 12.1 について、 $w \leq b (= 7)$ ,  $1 \leq m \leq n (= 4)$  なる  $w, m$  について  $P(w, m)$  が正しく計算されていることの証明を述べてきました。  $0 \leq w \leq b (= 7)$ ,  $1 \leq m \leq n (= 4)$  なる  $w, m$  についての論理変数  $P(w, m)$  の値を表 6 にまとめておきます。

表 6 例題 12.1 における  $P(w, m)$  の値

$w$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
2	0	1	1	1
3	1	1	1	1
4	0	0	0	0
5	0	1	1	1
6	0	0	1	1
7	0	0	0	1

ここまで示した証明は以下の形なっています。

- $m = 1$  のときに、 $w \leq b (= 7)$  なる  $w$  について  $P(w, 1)$  が正しく計算されていることを示す。(このとき、 $P(w - a_2, 1)$  も正しく計算されている。)
- $2 \leq m \leq n (= 4)$  のときに、 $w \leq b (= 7)$  なる  $w$  について  $P(w, m - 1)$  が正しく計算されている (したがって、 $P(w - a_k, m - 1)$  も正しく計算されている) ならば、 $P(w, m)$  が正しく計算されていることを示す。

すなわち、 $m$ に関する数学的帰納法の形式になっています。繰り返しますと以下の形です。

**(帰納法のベース)**  $m = 1$  のときに、 $w \leq b (= 7)$  なる  $w$  について  $P(w, 1)$  が正しく計算されていることを示す。(このとき、 $P(w - a_2, 1)$  も正しく計算されている。)

**(帰納法の仮定)**  $2 \leq m \leq n (= 4)$  のとき、 $w \leq b (= 7)$  なる  $w$  について  $P(w, m - 1)$  が正しく計算されている(したがって、 $P(w - a_m, m - 1)$  も正しく計算されている)と仮定する。

**帰納ステップ**  $2 \leq m \leq n (= 4)$  のとき、(この仮定の下で)  $w \leq b (= 7)$  なる  $w$  について  $P(w, m)$  が正しく計算されていることを示す。

このあと、部分和问题を解くために定義導入した論理変数  $P(w, m)$  が  $w \leq b, 1 \leq m \leq n$  なる整数  $w, m$  すべてについて正しく計算されていることを  $m$  に関する数学的帰納法で一般的に証明します。

## 1.6 $P(w, m)$ に対する漸化式の正当性

ここで部分和问题と述語  $P(w, m)$  の定義をもう一度書いておきます。

### 部分和问题

(入力)  $n$  個の正の整数の集合  $\{a_1, \dots, a_n\}$ , 目標値  $b$

(出力) 以下を満たす添字集合  $S_n \subseteq I_n = \{1, \dots, n\}$  が存在するとき YES ; そうでないときは NO :

$$\sum_{i \in S_n} a_i = b$$

**述語** (初期値設定と論理式)

( $w < 0$  のとき)

$$P(w, m) = 0 \quad (1 \leq m \leq n \text{ なるすべての整数 } m \text{ について})$$

( $m = 1$  のとき)

$$P(0, 1) = 1, \quad P(a_1, 1) = 1 \quad (a_1 = 3)$$

$$P(w, 1) = 0 \quad (1 \leq w \leq b \text{ かつ } w \neq a_1 \text{ なるすべての整数 } w \text{ について})$$

( $2 \leq m \leq n$  のとき)

$$P(w, m) = P(w, m - 1) \vee P(w - a_m, m - 1) \quad (0 \leq w \leq b \text{ なるすべての整数 } w \text{ について})$$

(ここで、 $\vee$  は「または」を表す)

ここでの目標は次の命題を証明することです。

**命題 12.1**  $w \leq b, 1 \leq m \leq n$  なるすべての整数  $w, m$  について  $P(w, m)$  は正しく計算される。

以下で、 $w \leq b, 1 \leq m \leq n$  なる整数  $w, m$  すべてについて  $P(w, m)$  は正しく計算されることを  $m$  に関する数学的帰納法で証明していきます。

### 1.6.1 帰納法のベース: $m = 1$ のとき

1.  $m = 1$  のときの  $P(w, m)$  の値設定は

$$P(0, 1) = 1, \quad P(a_1, 1) = 1$$

$P(w, 1) = 0$  ( $1 \leq w \leq b$ かつ $w \neq a_1$ なるすべての整数 $w$ について)

$P(w, 1) = 0$  ( $w < 0$ のとき)

です。

2. 探索対象の添字集合は  $I_1 = \{1\}$  で、 $I_1$  に含まれる部分集合は  $\emptyset$  と  $I_1$  自身です。このとき  $P(0, 1) = 1$  および  $P(a_1, 1) = 1$  であり、かつ

$$\sum_{i \in \emptyset} a_i = 0 \quad \text{および} \quad \sum_{i \in I_1} a_i = a_1$$

が成り立ちます。

3. 次に、 $1 \leq w \leq b$ かつ $w \neq a_1$ なる整数 $w$ に着目します。 $P(w, 1) = 0$ です。
4. このとき、 $\sum_{i \in S} a_i = w$ を満たす $S \subseteq I_1$ が存在すると仮定してみましょう。 $S = \emptyset$ または $S = I_1$ のいずれかですが、上述の通り $\sum_{i \in \emptyset} a_i = 0$ または $\sum_{i \in I_1} a_i = a_1$ で、「 $1 \leq w \leq b$ かつ $w \neq a_1$ 」なる条件に矛盾します。
5. したがって、 $1 \leq w \leq b$ かつ $w \neq a_1$ なる $w$ については $\sum_{i \in S} a_i = w$ を満たす $S \subseteq I_1$ は存在しません。
6.  $w < 0$ とします。このときは $P(w, 1) = 0$ ですし、各要素 $a_i > 0$  ( $i \in I_n$ )ですから $\sum_{i \in S} a_i = w$ を満たす $S \subseteq I_1$ は存在しません。
7. 以上、2によって $P(0, 1) = 1$ と $P(a_1, 1) = 1$ の妥当性が、3~6によって $P(w, 1) = 0$  ( $w \leq b$ かつ $w \neq 0$ かつ $w \neq a_1$ )の妥当性がそれぞれ示されています。すなわち、 $m = 1$ のときに $w \leq b$ なる整数 $w$ すべてについて $P(w, m)$ は正しく計算されています。

### 1.6.2 帰納法の仮定と帰納ステップ: $2 \leq m \leq n$ のとき

(帰納法の仮定)  $2 \leq m \leq n$ のとき、 $w \leq b$ なる整数 $w$ すべてについて $P(w, m-1)$ が正しく計算されている(したがって $P(w - a_m, m-1)$ も正しく計算されている)と仮定します。ここで、

$$P(w, m) = P(w, m-1) \vee P(w - a_m, m-1)$$

です。

#### (帰納ステップ)

1.  $P(w, m-1) = 1$ のとき
  - このとき $P(w, m) = 1$ かつ $w \geq 0$ です。
  - 一方、帰納法の仮定より、 $\sum_{i \in S_{m-1}} a_i = w$ を満たす $S_{m-1} \subseteq I_{m-1}$ が存在します。 $S_m \leftarrow S_{m-1}$ とすれば $S_m \subseteq I_{m-1} \subseteq I_m$ ですので、 $\sum_{i \in S_m} a_i = w$ を満たす $S_m \subseteq I_m$ が存在します。
2.  $P(w, m-1) = 0$ のとき
  - (a)  $P(w - a_m, m-1) = 1$ のとき
    - このとき $P(w, m) = 1$ かつ $w \geq a_m > 0$ です。
    - 一方、帰納法の仮定によって $\sum_{i \in S_{m-1}} a_i = w - a_m$ を満たす $S_{m-1} \subseteq I_{m-1}$ が存在します。 $S_m \leftarrow S_{m-1} \cup \{m\}$ とすれば、 $S_m \subseteq I_m$ かつ $\sum_{i \in S_m} a_i = \sum_{i \in S_{m-1}} a_i + a_m = w - a_m + a_m = w$ が成り立ちます。
  - (b)  $P(w - a_m, m-1) = 0$ のとき

- このとき  $P(w, m) = 0$  です。
  - $w < 0$  ならば、各要素  $a_i > 0 (i \in I_n)$  ですから、 $\sum_{i \in S_m} a_i = w$  を満たす  $S_m \subseteq I_m$  は存在しません。
  - $w \geq 0$  とします。ここで、 $\sum_{i \in S_m} a_i = w$  を満たす  $S_m \subseteq I_m$  が存在すると仮定してみましょう。
  - $P(w, m-1) = 0$  ですので、帰納法の仮定から  $\sum_{i \in S'} a_i = w$  を満たす  $S' \subseteq I_{m-1}$  は存在しません。したがって、 $m \in S_m$  です。すなわち、 $S_m - \{m\} \subseteq I_m - \{m\} = I_{m-1}$  であり、かつ  $w \geq a_m$  です。
  - このとき  $\sum_{i \in S_m - \{m\}} a_i = w - a_m \geq 0$  が成り立ちますので、帰納法の仮定によって  $P(w - a_m, m-1) = 1$  となり、矛盾が生じます。
  - したがって、 $\sum_{i \in S_m} a_i = w$  を満たす  $S_m \subseteq I_m$  は存在しません。
3. 以上、1と2(a)によって  $P(w, m) = 1$  の妥当性が、2(b)によって  $P(w, m) = 0$  の妥当性がそれぞれ示されています。すなわち、 $2 \leq m \leq n$  のとき、 $w \leq b$  なる整数  $w$  すべてについて  $P(w, m)$  は正しく計算されています。

以上で、 $w \leq b, 1 \leq m \leq n$  なる整数  $w, m$  すべてについて  $P(w, m)$  は正しく計算されることが  $m$  に関する数学的帰納法により証明されました。