グラフとアルゴリズムとプログラムのやさしいおはなし

渡邉敏正

2022 年 4 月 19 日

第 12 回

1　部分和問題を解いてみよう

第 2 回で取り上げた部分和問題を解くプログラムの作成を考えましょう。部分和問題は以下で定義されます。

> (**部分和問題の定義**)
> (入力) $(n+1)$ 個の正の整数 $a_1, \cdots, a_n, b$
> (出力) 以下を満たす添字集合 S が存在するとき YES、そうでないときは NO：
>
> $$\sum_{i \in S} a_i = b \text{ かつ } S \subseteq I_n = \{1, \cdots, n\}$$

言い換えますと

> 与えられた n 個の正整数 $a_1, \cdots, a_n$ から適当に何個か選んでそれらの総和が b になるようにできれば YES、そうでなければ NO と答えなさい

という問題です。

注意 12.1 部分和問題の定義は YES、NO を決める決定問題であることに注意してください。条件を満たす部分集合を具体的に求める問題も考えられます。これについては別途考えることにします。

注意 12.2 定義における和の記述の仕方としては、

$$\sum_{a_i \in T} a_i = b \text{ かつ } T \subseteq \{a_1, \cdots, a_n\}$$

を満たす集合 T が存在するとき、という表現も可能ですが、ここでは添字集合で扱うことにします。後述の例題 12.1 のあとにある説明文も参考にしてください。

1.1　例題と総当たり法

まず例題を示して、第 2 回で説明した総当たり法で解いてみましょう。

例題 12.1

(入力) $n\,(=4)$ 個の正の整数 $\{a_1=3,\ a_2=2,\ a_3=6,\ a_4=5\}$、添字集合 $I_4=\{1,2,3,4\}$、目標値 $b=7$

(出力) 以下を満たす集合 S_4 が存在するとき YES；そうでないときは NO:

$$\sum_{i\in S_4} a_i \ =\ 7\,(=b)\ \text{かつ}\ S_4\subseteq I_4=\{1,\cdots,4\}$$

- この例題について、たとえば $S_4=\{1,2,3\}$ ならば $\sum_{i\in S_4} a_i \ = a_1+a_2+a_3 = 11 \neq b$ ですし、$S_4=\{2,4\}$ ならば $\sum_{i\in S_4} a_i \ = a_2+a_4 = 7 = b$ です。したがって、この例題については YES となります。なお、注意 12.2 で言及したように、添字集合 S_4 の代わりに $T=\{a_2,a_4\}$ として $\sum_{a_i\in T} a_i \ = a_2+a_4=7=b$ なる表現も可能ですが、ここでは添字集合による表現に統一しています。
- この例題を総当たり法で解く場合には、以下の表 1 の $2^4=16$ 個の部分集合 (この場合は要素の集合で表記しています) について 1 つずつその和をチェックしていきます。例えば、以下の表で空集合から大きな集合へと進めば 10 回目で、全体集合から逆に小さな集合へと進めば 7 回目で、YES が出力されます。ただ、どちらが速いかは開始前には不明で結果はやってみないとわかりません。(チェックする部分集合の順序が変われぱまた違ってきます。) 目標値が $b=15$ ですと、すべての場合をチェックして NO が出力されます。こ場合はどちらから進めても同じで最悪のケースです。

表 1　例題についての総当たり法の実行過程の例

No.	部分集合	和	No.	部分集合	和
0	$\emptyset$	0	8	{2,6}	8
1	{3}	3	9	{2,5}	7
2	{2}	2	10	{6,5}	11
3	{6}	6	11	{3,2,6}	11
4	{5}	5	12	{3,2,5}	10
5	{3,2}	5	13	{3,6,5}	14
6	{3,6}	9	14	{2,6,5}	13
7	{3,5}	8	15	{3,2,6,5}	16

- これも一つの解法ですが、今回は総当たり法よりは効率の良い解法を示し、さらにこの解法を実行する C 言語プログラムを作成することを目指します。最悪の場合は総当たり法と同等になりますが、総当たり法より速く YES、NO を判定する場合が多くなります。
- プログラム作成の前に、まずこの問題を解くアルゴリズムを設計し、そのアルゴリズムが部分和問題を正しく解くこと (正当性) を示さなければなりません。これらを通過した後で C 言語によってプログラム作成をすることになります。
- アルゴリズムの設計と正当性の証明ですが、まず例題 12.1 でこのステップを説明します。これで皆さんにある程度理解していただいて、その後で一般的なアルゴリズムの設計と正当性の証明に進むことにします。

1.2　論理変数 $P(w,m)$ の定義導入

部分問題を解くために論理変数を定義導入して、アルゴリズム設計の準備をします。論理変数の意味や導入目的、解法の設計での使い方についての説明は、皆さんが理解しやすいように上述の例題 12.1 の沿った形で記述しますが、一般的な場合にそのまま適用できます。

1.2.1　論理変数 $P(w,m)$ とその導入目的

- この問題を解くために 1 (真: true) または 0 (偽: false) のいずれかの値をとる論理変数 $P(w,m)$ を考えます。なお、この論理変数は $0 \le w \le b\,(=7)$ および $1 \le m \le n\,(=4)$ なる w および m すべてについて考えます。
- 論理変数 $P(w,m)$ の導入の意図になりますが、以下の $\Longleftrightarrow$ の右側の命題 (添字集合 S_m の存在性) を簡潔に表現することが目的の 1 つです：

$$P(w,m)=1 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l}(\,w \le b\,(=7) \text{ および } 1 \le m \le n\,(=4) \text{ なるすべての } w \text{ および } m \text{ について})\\ \quad w \ge 0 \text{ であって『} \sum_{i \in S_m} a_i = w \text{ かつ } S_m \subseteq I_m = \{1, \cdots, m\} \text{』}\\ \quad \text{を満たす添字集合 } S_m \text{ が存在する}\end{array}$$

- 例題 12.1 については、たとえば $S_3 = \{1,2\} \subseteq I_3$ に対して $\sum_{i \in S_3} a_i = a_1 + a_2 = 3 + 2 = 5$ が成り立ちますので $P(5,3)=1$、あるいは $S_4 = \{2,4\} \subseteq I_4$ に対して $\sum_{i \in S_4} a_i = a_2 + a_4 = 7 = b$ が成り立ちますので $P(7,4)=1$ などの表現になります。
- ここで、「$A \Longleftrightarrow B$」 なる表現は、以下の 2 命題が同時に成り立つことを表しています：
  - A が成り立つならば B が成り立つ ($A \Longrightarrow B$)
  - B が成り立つならば A が成り立つ ($B \Longrightarrow A$)
- 具体的には、以下の 2 命題が同時に成り立つことです。
  - $P(w,m)=1$ ならば $w \ge 0$ であって『$\sum_{i \in S_m} a_i = w$ かつ $S_m \subseteq I_m = \{1, \cdots, m\}$』を満たす S_m が存在する
  - $w \ge 0$ であって『$\sum_{i \in S_m} a_i = w$ かつ $S_m \subseteq I_m = \{1, \cdots, m\}$』を満たす S_m が存在するならば $P(w,m)=1$ である
- 上側の命題は対偶[*1]を考えれば、以下の命題が成り立つことになります：
  - $w < 0$ ならば、あるいは、$w \ge 0$ であって『$\sum_{i \in S_m} a_i = w$ かつ $S_m \subseteq I_m = \{1, \cdots, m$』を満たす S_m が存在しないならば $P(w,m)=0$ である
    ($a_i > 0\,(i \in I_n)$ ですから、$w < 0$ ならば『$\sum_{i \in S_m} a_i = w$ かつ $S_m \subseteq I_m$』を満たす S_m は存在しません。)
- したがって、$w \ge 0$ であって『$\sum_{i \in S_m} a_i = w$ かつ $S_m \subseteq I_m = \{1, \cdots, m\}$』を満たす S_m が存在するか否かは $P(w,m)$ が 1 か 0 かで判定できることになります。

1.2.2　例題 12.1 の解法に向けて

- 上述の通り、論理変数 $P(w,m)$ の導入目的は条件を満たす集合 S_m が存在するか否かを $P(w,m)$ が 1 か 0 かで判断できるようにする、ということです。

[*1] $A \Longrightarrow B$ の対偶は $\neg B \Longrightarrow \neg A$ です。ここで、$\neg$ は否定を表します。

- ただし、これはあくまで定義の話、導入の目的です。これにより正確な判定ができることを証明する必要があります。そのために、ここから

  $P(w,m)$ **が正しく計算されている** (あるいは、$P(w,m)$ **は正しく計算される)**

  という表現を使うことにします。この意味は以下の 2 命題が共に成り立つこととします。
  - $w \geq 0$ であって『$\sum_{i \in S_m} a_i = w$ かつ $S_m \subseteq I_m = \{1, \cdots, m\}$』を満たす S_m が存在するならば $P(w,m) = 1$ である
  - $w < 0$ ならば、あるいは $w \geq 0$ であって『$\sum_{i \in S_m} a_i = w$ かつ $S_m \subseteq I_m = \{1, \cdots, m\}$』を満たす S_m は存在しないならば $P(w,m) = 0$ である
- これらは「ならば」の前後を入れ替えた以下の命題が成り立つことと同じことになり、必要に応じて選択して使います。
  - $P(w,m) = 1$ ならば $w \geq 0$ であって『$\sum_{i \in S_m} a_i = w$ かつ $S_m \subseteq I_m$』を満たす S_m が存在する
  - $P(w,m) = 0$ ならば $w < 0$ であるか、あるいは ($w \geq 0$ であっても)『$\sum_{i \in S_m} a_i = w$ かつ $S_m \subseteq I_m$』を満たす S_m は存在しない

部分和問題を解くには「$P(b,n)$ が正しく計算されている」ことが必要になります。例題 12.1 について言えば、$P(7,4)$ $(w = 7,\ m = n = 4)$ が正しく計算されている」とすると

$$P(7,4) = 1 \Longleftrightarrow 7 \geq 0 \text{ であって『} \sum_{i \in S_4} a_i = 7 \text{ かつ } S_4 \subseteq I_4 = \{1, \cdots, 4\} \text{』を満たす } S_4 \text{ が存在する}$$

が成り立ちますので、

$$P(7,4) = 1 \text{ ならば YES} \qquad P(7,4) = 0 \text{ ならば NO}$$

を出力すればこの例題を解いたことになります。

1.3 漸化式による例題 12.1 の解法

1.3.1 初期値設定と論理式

「$P(7,4)$ は正しく計算される」ことを示すために $P(w,m)$ について以下の初期値設定と論理式を考えます。

- $m = 1$ のとき

  $P(0,1) = 1,\ P(a_1,1) = 1$ (ここで、$a_1 = 3$)

  $P(w,1) = 0$ ($1 \leq w \leq b = 7$ かつ $w \neq a_1$ なるすべての整数 w について)
- $2 \leq m \leq n = 4$ のとき

  $P(w,m) = p(w,m-1) \vee P(w - a_m, m-1)$ ($1 \leq w \leq b = 7$ なるすべての整数 w について)

  (ここで、$\vee$ は「または」を表す)
- $w < 0$ のとき

  $P(w,m) = 0$ ($1 \leq m \leq n = 4$ なるすべての整数 m について)

注意 12.3 ここで、$w < 0,\ 1 \leq m \leq n$ とします。このとき $P(w,m) = 0$ です。また、(既に述べたことですが) $a_i > 0$ ($i \in I_n$) ですから『$\sum_{i \in S_m} a_i = w$ かつ $S_m \subseteq I_m$』を満たす S_m は存在しません。すなわち、$w < 0$ ならば $1 \leq m \leq n$ なる m に対して $P(w,m)$ は正しく計算されています。したがって、今後 $P(w,m)$ が正しく計算されているか否かは、特に断らない限り、$w \geq 0$ の場合について考えていきます。

1.3.2 論理変数と漸化式の関係について

$2 \leq m \leq n$ のときの論理変数と漸化式の関係を説明しておきます。

- $P(w, m) = 1$ が意味するのは、以下のどちらかが成り立つことです：
  - $P(w, m-1) = 1$ (したがって、$w \geq 0$) である
  - $P(w - a_m, m-1) = 1$ (したがって、$w \geq a_m$) である
- つまり、

  $w \geq 0$ であって『$\sum_{i \in S_m} a_i = w$ かつ $S_m \subseteq I_m = \{1, \cdots, m\}$』を満たす S_m が存在する

  ということは

  $w \geq 0$ であって『$\sum_{i \in S_{m-1}} a_i = w$ かつ $S_{m-1} \subseteq I_{m-1} = \{1, \cdots, m-1\} (\subseteq I_m)$』を満たす S_{m-1} が存在する　(すなわち、$\sum_{i \in S_{m-1}} a_i = w$ なので $S_m \leftarrow S_{m-1}$)

  あるいは

  $w \geq a_m$ であって『$\sum_{i \in S_{m-1}} a_i = w - a_m$ かつ $S_{m-1} \subseteq I_{m-1}$』を満たす S_{m-1} が存在する
  (すなわち、$\sum_{i \in S_{m-1} \cup \{m\}} a_i = w$ なので $S_m \leftarrow S_{m-1} \cup \{m\}$)

  のいずれかが成り立つとことと同じであると主張している訳です。
- 一方、$w \geq 0$ の場合に、$P(w, m) = 0$ が意味するのは以下が成り立つことです。

  $P(w, m-1) = 0$ 　かつ　 $P(w - a_m, m-1) = 0$
- つまり、

  $w \geq 0$ であって『$\sum_{i \in S_m} a_i = w$ かつ $S_m \subseteq I_m$』を満たす S_m が存在しない

  ということは

  $w \geq 0$ であって『$\sum_{i \in S_{m-1}} a_i = w$ かつ $S_{m-1} \subseteq I_{m-1}$ を満たす S_{m-1} は存在せず
  ($w < 0$ ならばこのような S_{m-1} が存在しないことは明らかです)

  かつ

  $w \geq a_m$ であって『$\sum_{i \in S_{m-1}} a_i = w - a_m$ かつ $S_{m-1} \subseteq I_{m-1}$』を満たす S_{m-1} も存在しない
  ($w < a_m$ ならばこのような S_{m-1} が存在しないことは明らかです)

  が成り立つことと同じであると主張しています。

1.3.3 漸化式とアルゴリズム

上記の初期値設定と論理式により次のことが予想できます。

- $m = 1$ のときに $P(w, 1)$ が $0 \leq w \leq b = 7$ なるすべての w について決まりますので、$m = 2$ の場合の論理式 $P(w, 2) = P(w, 1) \vee P(w - a_2, 1)$ を使って $P(w, 2)$ の値が計算できます ($0 \leq w \leq b = 7$ なるすべての整数 w について)。
- これらを利用して、再び $m = 3$ の場合の論理式 $P(w, 3) = P(w, 2) \vee P(w - a_3, 2)$ を使って $P(w, 3)$ の値が計算できます ($0 \leq w \leq b = 7$ なるすべての整数 w について)。
- 同様に、$m = 4, \cdots$ についても $P(w, m-1)$ が $0 \leq w \leq b = 7$ なるすべての w について計算済みであれば $P(w, m)$ の値が計算できます。
- このような形式を**漸化式** (recurrence formula; recursion) といいます。この漸化式は $P(b, n)$ (ここでは、$b = 7$, $n = 4$) を計算するためのアルゴリズムになっています。

- したがって、アルゴリズム (上記の漸化式) の正当性は、$0 \leq w \leq b = 7,\ 1 \leq m \leq n = 4$ なるすべての整数 $w,\ m$ について以下を証明することになります：

  $P(w, m)$ **は正しく計算される**

注意 12.4 $P(w,m) = P(w,m-1) \vee P(w-a_m,m-1)$ についての補足です。

1. いま $P(w,m-1)$ が正しく計算されており、かつ $P(w,m-1) = 1$ とします。このとき、$P(w,m) = 1$ です。
2. さらに、$P(w,m-1) = 1$ ならば、『$\sum_{i \in S_{m-1}} a_i = w$ かつ $S_{m-1} \subseteq I_{m-1} = \{1, \cdots, m-1\}$』を満たす S_{m-1} が存在します。$S_{m-1} \subseteq I_{m-1} \subseteq I_m$ ですから、$S_m \leftarrow S_{m-1}$ とすれば『$\sum_{i \in S_m} a_i = w$ かつ $S_m \subseteq I_m$』を満たす S_m が存在することになります。したがって、$P(w,m)$ は正しく計算されます。
3. 上述の通り、$P(w,m-1) = 1$ ならば $P(w,m) = 1$ は正しく計算されます。したがって、$P(w,m) = 1$ が正しく計算されているか否かの判定は、$P(w,m-1) = 0$ かつ $P(w-a_m,m-1) = 1$ の場合のみを考えればよいことになり、$P(w,m-1) = 1$ の場合が省略できて判定操作の効率がよくなります。
4. 明らかなことですが、$P(w,m-1) = 0$ の場合については、$P(w-a_m,m-1) = 0$ なる条件の下で $P(w,m) = 0$ が正しく計算されているか否かを考えることになります。

上述の漸化式に基づいて次の命題が成り立つことを証明できます。

命題 12.1 $0 \leq w \leq b,\ 1 \leq m \leq n$ なるすべての整数 w, m について $P(w,m)$ は正しく計算される。

この命題の証明については、後述の 1.5 と 1.6 にまとめています。1.5 では例題 12.1 に関して漸化式の正当性を示しています。続いて 1.6 で一般的な場合について漸化式の正当性を数学的帰納法で証明します。いずれも数学的色彩の濃い内容になります。このような話が苦手な方、あるいは手っ取り早く結論のみ知っておけば十分とお考えの方は命題 12.1 が成り立つことを前提にして、1.4 の「$P(w,m)$ に対する漸化式に基づいた C 言語プログラムの作成」に取り組んでください。1.5 と 1.6 はスキップしていただいて差し支えありません。なお、1.5 は例題を使って正当性の証明をしていますので、$m = 1$、$m = 2$ あたりの説明を少し見ていただくと 1.6 の一般的な場合の証明方法のイメージをつかむことの助けになると思います。

1.4 $P(w,m)$ に対する漸化式に基づいた C 言語プログラムの作成

ここで部分和問題の定義、解法に向けて導入した論理変数 $P(w,m)$ およびその真偽 (0,1) を計算するための漸化式を再掲しておきます。

部分和問題
(入力) n 個の正の整数 の集合 $\{a_1 \cdots, a_n\}$, 目標値 b
(出力) 以下を満たす添字集合 S_n が存在するとき YES；そうでないときは NO：

$$\sum_{i \in S_n} a_i = b \text{ かつ } S_n \subseteq I_n = \{1, \cdots, n\}$$

論理変数　$P(w,m)$　($w \leq b$ および $1 \leq m \leq n$ なる w および m について)

$P(w,m) = 1 \iff w \geq 0$ であって『$\sum_{i \in S_m} a_i = w$ かつ $S_m \subseteq I_m = \{1, \cdots, m\}$』を満たす添字集合 S_m が存在する

$P(w,m)$ **に対する漸化式** (初期値設定と論理式)

(m = 1 のとき)

$P(0,1)=1,\ P(a_1,1)=1$

$P(w,1)=0$ ($1 \le w \le b$ かつ $w \neq a_1$ なるすべての整数 w について)

($2 \le m \le n$ のとき)

$P(w,m)=P(w,m-1) \vee P(w-a_m,m-1)$ ($0 \le w \le b$ なるすべての整数 w について)

(ここで、$\vee$ は「または」を表す)

($w < 0$ のとき)

$P(w,m)=0$ ($1 \le m \le n$ なるすべての整数 m について)

まずプログラムを図 129 に示します。なお、行番号は説明用に入れています。プログラムに記述するとエラーになります。

操作別に簡単な説明をしておきます。

(1) **初期データの格納と宣言** (行番号 1〜11)

要素数 n と目標値 b はマクロで記述します：

```
3   #define n 4 // #Elements
4   #define b 7 // Target value
```

また、正の整数の集合は整数型 1 次元配列 `a[n+1]` (`a[0]` は未使用) に格納します。宣言時に要素を設定します。また、$P(w,m)$ の値を整数型 2 次元配列 `P[b+1][n+1]` に蓄えます。11 行目は使用する変数の宣言です。

```
8   int a[n+1] = { 0,3,2,2,6,5 }; // a[0] は未使用
9   // int c[n+1];  ここでの YES, NO の判定では使用しない；あとで解を求める際に使用
10  int P[b+1][n+1];
11  int i, w, k, m;
```

(2) $P(w,m)$ **の初期値設定** (行番号 12〜20)

`for` 文を使って定義通りに記述します。なお、計算処理の都合で $1 \le w \le b$ について `P[w][0]=0;` と設定しておきます。

```
12  // 初期値設定
13  for (w = 0; w <= b; w++) {
14      if ( (w==0) || (w == a[1]) )
15          P[w][1] = 1;
16      else
17          P[w][1] = 0;  // 0:false  1:true
18  }
19  for (w = 1; w <= b; w++)
20      P[w][0] = 0;
```

(3) **漸化式の計算** (行番号 21〜29)

$0 \le w \le b,\ 2 \le m \le n$ なる w, m について漸化式 $P(w,m)=P(w,m-1) \vee P(w-a_m,m-1)$ を `for` 文の 2 重ループで記述します。

- $P(w,m-1)=1$ または $P(w-a_m,m-1)=1$ のとき $P(w,m)=1$ と設定します。
- それ以外のとき、つまり

```c
// Solving the SUBSET_SUM problem
#include <stdio.h>
#define n 4 // #Elements
#define b 7 // Target value

int main(void)
{
int a[n+1] = { 0,3,2,6,5 }; // a[0] は未使用
// int c[n+1];  ここでの YES，NO の判定では使用しない；あとで解を求める際に使用
int P[b+1][n+1];
int i, w, k, m;
// 初期値設定
for (w = 0; w <= b; w++) {
    if ( (w==0) || (w == a[1]) )
        P[w][1] = 1;
    else
        P[w][1] = 0;  // 0:false  1:true
}
for (w = 1; w <= b; w++)
    P[w][0] = 0;
// 動的計画法の実行
for (m = 2; m <= n; m++) {
    for (w = 0; w <= b; w++) {
        if ((P[w][m - 1] == 1) || ((w - a[m] >= 0) && (P[w - a[m]][m - 1] == 1)))
            P[w][m] = 1;
        else
            P[w][m] = 0;
    }
}
//  入力データと計算結果の表示
printf("\n****** The SUBSET_SUM problem *****\n#Elements n=%d,
Target value b=%d\n", n, b);
for (w = 1; w <= n; w++)
    printf("a[%d]=%d  ", w, a[w]);
printf("\n\n");
for (w = 0; w <= b; w++) {
    for (m = 1; m <= n; m++)
        printf("P(%d,%d)=%d  ", w, m, P[w][m]);
    printf("\n");
}
printf("\nThe answer is ");
if (P[b][n] == 1)
    printf("YES\n");
else
    printf("NO\n");
printf("\n");

return 0;
}
```

図 129　部分和問題を解く C 言語プログラム subsetsum-8.c

$$P(w, m-1) = 0 \text{ かつ } [\ w - a_m < 0 \text{ または } (\ w - a_m \geq 0 \text{ かつ } P(w - a_m, m-1) = 0\ )\ ]$$

のとき $P(w, m) = 0$ と設定します。この部分は `else` 文で記述しますので、プログラム文としては表現されません。

```
21  // 動的計画法の実行
22  for (m = 2; m <= n; m++) {
23      for (w = 0; w <= b; w++) {
24          if ((P[w][m - 1] == 1) || ((w - a[m] >= 0) && (P[w - a[m]][m - 1] == 1)))
25              P[w][m] = 1;
26          else
27              P[w][m] = 0;
28      }
29  }
```

(4) **データの表示** (行番号 30〜45)

はじめにデータ数 n、目標値 b を続けて表示し、改行して n 個の正の整数 $a_1, \cdots, a_n$ を `a[i]=(要素)` の形で横一列に表示し、最後で改行します。そのあとに以下の形で $P(w, m)$ の値を表示させます。図 130 などを参照してください。これらを表示したあとで改行し、YES あるいは NO を表示させています。

$$
\begin{array}{ccc}
P(0,1)=\text{値} & \cdots & P(0,n) = \text{値 (改行)} \\
 & \vdots & \\
P(k,1)=\text{値} & \cdots & P(k,n) = \text{値 (改行)} \\
 & \vdots & \\
P(b,1)=\text{値} & \cdots & P(b,n) = \text{値 (改行)}
\end{array}
$$

なお、現在のプログラムでは $P(w, m)$ の値を $0 \leq w \leq b,\ 1 \leq m \leq n$ なるすべての整数 w, m について表示していますが、w あるいは n が大きいときには表示を制限することも必要になると思います。

(5) **例題 12.1 に関する実行結果**

例題 12.1 に対する C 言語プログラム `subsetsum-8.c` の実行結果が図 130 で、出力は YES です。解は添字集合としては $\{2, 4\}$ であり、要素集合として $\{a_2 = 2,\ a_4 = 5\}$ です。(ここでは解集合を求めることは要求されていませんが、参考のため記載しています。) 例題 12.1 の目標値を $b = 11$ に変更した場合の `subsetsum-8.c` の実行結果が図 131 で、出力は YES です。1 つの解は添字集合としては $\{1, 2, 3\}$ であり、要素集合として $\{a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_3 = 6\}$ です。なお、添字集合として $\{3, 4\}$、要素集合として $\{a_3 = 6,\ a_4 = 5\}$ も $b = 11$ の場合は解です。例題 12.1 の目標値を $b = 12$ に変更した場合の `subsetsum-8.c` の実行結果が図 132 で、出力は NO です。

(6) **他の例題に関する実行結果**

少し複雑な例題に対してプログラムを実行してみましょう。以下の例題です。

例題 12.2 [*2]

(入力)

$n\,(=10)$ 個の正の整数

[*2] 次の本の 951 ページに掲載されている例題です：T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, "Introduction to Algorithms", The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, USA, 1990.

```
Toshimasa-no-MacBook-Pro:subset_sum_new watanabe$ gcc -o subsetsum-8 subsetsum-8.c
Toshimasa-no-MacBook-Pro:subset_sum_new watanabe$ ./subsetsum-8

****** The SUBSET_SUM problem *****
#Elements n=4,  Target value b=7
a[1]=3  a[2]=2  a[3]=6  a[4]=5

P(0,1)=1  P(0,2)=1  P(0,3)=1  P(0,4)=1
P(1,1)=0  P(1,2)=0  P(1,3)=0  P(1,4)=0
P(2,1)=0  P(2,2)=1  P(2,3)=1  P(2,4)=1
P(3,1)=1  P(3,2)=1  P(3,3)=1  P(3,4)=1
P(4,1)=0  P(4,2)=0  P(4,3)=0  P(4,4)=0
P(5,1)=0  P(5,2)=1  P(5,3)=1  P(5,4)=1
P(6,1)=0  P(6,2)=0  P(6,3)=1  P(6,4)=1
P(7,1)=0  P(7,2)=0  P(7,3)=0  P(7,4)=1

The answer is YES
```

図 130　例題 12.1 に対する `subsetsum-8.c` の実行結果

```
Toshimasa-no-MacBook-Pro:subset_sum_new watanabe$ gcc -o subsetsum-8 subsetsum-8.c
Toshimasa-no-MacBook-Pro:subset_sum_new watanabe$ ./subsetsum-8

****** The SUBSET_SUM problem *****
#Elements n=4,  Target value b=11
a[1]=3  a[2]=2  a[3]=6  a[4]=5

P(0,1)=1  P(0,2)=1  P(0,3)=1  P(0,4)=1
P(1,1)=0  P(1,2)=0  P(1,3)=0  P(1,4)=0
P(2,1)=0  P(2,2)=1  P(2,3)=1  P(2,4)=1
P(3,1)=1  P(3,2)=1  P(3,3)=1  P(3,4)=1
P(4,1)=0  P(4,2)=0  P(4,3)=0  P(4,4)=0
P(5,1)=0  P(5,2)=1  P(5,3)=1  P(5,4)=1
P(6,1)=0  P(6,2)=0  P(6,3)=1  P(6,4)=1
P(7,1)=0  P(7,2)=0  P(7,3)=0  P(7,4)=1
P(8,1)=0  P(8,2)=0  P(8,3)=1  P(8,4)=1
P(9,1)=0  P(9,2)=0  P(9,3)=1  P(9,4)=1
P(10,1)=0  P(10,2)=0  P(10,3)=0  P(10,4)=1
P(11,1)=0  P(11,2)=0  P(11,3)=1  P(11,4)=1

The answer is YES
```

図 131　例題 12.1 の目標値を $b = 11$ に変更した場合の `subsetsum-8.c` の実行結果

$\{a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 16, a_4 = 64\, a_5 = 256, a_6 = 1040, a_7 = 1041, a_8 = 1093, a_9 = 1284, a_{10} = 1344\}$,

目標値 $b = 3754$

(出力)

```
Toshimasa-no-MacBook-Pro:subset_sum_new watanabe$ gcc -o subsetsum-8 subsetsum-8.c
Toshimasa-no-MacBook-Pro:subset_sum_new watanabe$ ./subsetsum-8

****** The SUBSET_SUM problem *****
#Elements n=4,  Target value b=12
a[1]=3  a[2]=2  a[3]=6  a[4]=5

P(0,1)=1  P(0,2)=1  P(0,3)=1  P(0,4)=1
P(1,1)=0  P(1,2)=0  P(1,3)=0  P(1,4)=0
P(2,1)=0  P(2,2)=1  P(2,3)=1  P(2,4)=1
P(3,1)=1  P(3,2)=1  P(3,3)=1  P(3,4)=1
P(4,1)=0  P(4,2)=0  P(4,3)=0  P(4,4)=0
P(5,1)=0  P(5,2)=1  P(5,3)=1  P(5,4)=1
P(6,1)=0  P(6,2)=0  P(6,3)=1  P(6,4)=1
P(7,1)=0  P(7,2)=0  P(7,3)=0  P(7,4)=1
P(8,1)=0  P(8,2)=0  P(8,3)=1  P(8,4)=1
P(9,1)=0  P(9,2)=0  P(9,3)=1  P(9,4)=1
P(10,1)=0  P(10,2)=0  P(10,3)=0  P(10,4)=1
P(11,1)=0  P(11,2)=0  P(11,3)=1  P(11,4)=1
P(12,1)=0  P(12,2)=0  P(12,3)=0  P(12,4)=0

The answer is NO
```

図 132　例題 12.1 の目標値を $b = 12$ に変更した場合の `subsetsum-8.c` の実行結果

以下を満たす集合 S_{10} が存在するとき YES；そうでないときは NO：

$$\sum_{i \in S_{10}} a_i \ = \ 3754 \ (= b) \ \text{かつ} \ S_{10} \subseteq I_{10} = \{1, \cdots, 10\}$$

例題 12.2 に関する実行結果は図 133 に示しています。これについては YES が出力されます。解は添字集合としては $\{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$ であり、要素集合として $\{a_1 = 1, a_3 = 16, a_4 = 64, a_5 = 256, a_6 = 1040, a_8 = 1093, a_9 = 1284\}$ です。なお、プログラム名は `subsetsum-10.c` に変更しています。ここでは b, n の値が大きいので $P(w, m)$ の値の表示は省略するようにプログラムを変更しています。

```
Toshimasa-no-MacBook-Pro:subset_sum_new watanabe$ gcc -o subsetsum-10 subsetsum-10.c
Toshimasa-no-MacBook-Pro:subset_sum_new watanabe$ ./subsetsum-10

****** The SUBSET_SUM problem *****
#Elements n=10,  Target value b=3754
a[1]=1  a[2]=4  a[3]=16  a[4]=64  a[5]=256  a[6]=1040  a[7]=1041  a[8]=1093
a[9]=1284  a[10]=1344

The answer is YES
```

図 133　例題 12.2 に対する `subsetsum-10.c` の実行結果

1.5　例題 12.1 に関する $P(w,m)$ に対する漸化式の正当性

ここでは例題 12.1 に関して漸化式の正当性を示します。次の 1.6 で一般的な場合について漸化式の正当性を数学的帰納法で証明しますが、実例に対する証明を通して一般的な証明のイメージ掴んでいただくことが 1.5 を記述した意図です。いずれも数学的色彩の濃い内容になりますので、1.5 と 1.6 をスキップしていただいても差し支えありません。もちろん証明に挑戦してみていただきたい気持ちは持っています。

以下に例題 12.1 と $P(w,m)$ に対する漸化式をもう一度書いておきます。

例題 12.1
(入力)
$n\,(=4)$ 個の正の整数 $\{a_1=3,\ a_2=2,\ a_3=6,\ a_4=5\}$, 添字集合 $I_4=\{1,2,3,4\}$, 目標値 $b=7$
(出力)
以下を満たす集合 S_4 が存在するとき YES；そうでないときは NO：

$$\sum_{i\in S_4} a_i \;=\; 7\,(=b)\ \text{かつ}\ S_4\subseteq I_4=\{1,\cdots,4\,(=n)\}$$

漸化式 (初期値設定と論理式)
$(m=1$ のとき)
　$P(0,1)=1,\ P(a_1,1)=1\,(a_1=3)$
　$P(w,1)=0$ $(1\le w\le b=7$ かつ $w\ne a_1$ なるすべての整数 w について)
$(2\le m\le n=4$ のとき)
　$P(w,m)=P(w,m-1)\,\vee\,P(w-a_m,m-1)$　$(0\le w\le b=7$ なるすべての整数 w について)
　　(ここで、$\vee$ は「または」を表す)
$(w<0$ のとき)
　$P(w,m)=0$ $(1\le m\le n=4$ なるすべての整数 m について)

これから、$0\le w\le 7,\ 1\le m\le 4$ なるすべての整数 $w,\,m$ について「$P(w,m)$ は正しく計算される」ことを確かめていきます。なお、$\emptyset$ は空集合を表し、$I_m=\{1,\cdots m\}\,(m\le n)$ です。

1.5.1　$m=1$ のとき

1. 探索対象は $I_1=\{1\}$ の部分集合で、それらは $S_1^1=\emptyset$ と $S_1^2=\{1\}$ です。
2. $S_1^1=\emptyset$ に対し、$\sum_{i\in S_1^1} a_i=0$ なので $P(0,1)=1$ $(w=0,\ m=1)$ です。
3. $S_1^2=\{1\}$ に対し、$\sum_{i\in S_1^2} a_i=a_1\,(=3)$ なので $P(3,1)=1$ $(w=a_1=3,\ m=1)$ です。
4. $1\le w\le 7$ かつ $w\ne a_1$ なる w に対して『$\sum_{i\in S} a_i=w$ かつ $S\subseteq I_1$』を満たす S は存在しませんので、$P(w,1)=0$ です。
5. 以上により、$m=1$ のときに $0\le w\le 7$ なる w について $P(w,m)$ は正しく計算されています。
6. $P(w-a_2,1)\,(a_2=2)$ について ($P(w,2)$ の計算で使います)：論理変数 P の定義から、$w\le 1$ のときは $P(w-a_2,1)=P(w-2,1)=0$ です。
7. 以上、$P(w,1),\ P(w-a_2,1)$ などの値を表 2 の左側 6 列に示します。

1.5.2　$m = 2$ のとき

$m = 1$ の結果を利用して、$m = 2$ の場合にも $P(w, m)$ が正しく計算されていることを示します。

1. 探索対象は $I_2 = \{1, 2\}$ の $4\,(= 2^2)$ 個の部分集合で、それらは $S_2^1 = \emptyset$, $S_2^2 = \{1\}$, $S_2^3 = \{2\}$, $S_2^4 = \{1, 2\}$ です。
2. $P(w, 2) = P(w, 1) \lor P(w - a_2, 1)$ $(a_2 = 2)$ です。
3. $P(w, 1)$, $P(w - a_2, 1)\,(w - a_2 = w - 2 \leq 5)$ はすべて正しく計算されています。
4. 論理変数 P の定義から、$w \leq 1$ のときは $P(w - a_2, 1)\,(= P(w - 2, 1)) = 0$ です。(したがって、$w \leq 1$ ならば $P(w, 2) = P(w, 1)$ です。)
5. $P(w, 2)$ の値は表 2 の右から 2 列目になります。なお、

$$\{a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_3 = 6,\ a_4 = 5\},\ n = 4,\ b = 7;\quad 0 \leq w \leq 7,\ 1 \leq m \leq 2$$

です。

表 2　$P(w, 2) = P(w, 1) \lor P(w - a_2, 1)$ の値

w	$P(w,1)$	$S_1^j\,(\subseteq I_1)$	$w - a_2$	$P(w - a_2, 1)$	S_1^j	$P(w,2)$	$S_2^j\,(\subseteq I_2)$
0	1	$\emptyset$	-2	0		1	$\emptyset$
1	0		-1	0		0	
2	0		0	1		1	$\emptyset \cup \{2\}$
3	1	$\{1\}$	1	0	$\emptyset$	1	$\{1\}$
4	0		2	0		0	
5	0		3	1	$\{1\}$	1	$\{1\} \cup \{2\}$
6	0		4	0		0	
7	0		5	0		0	

6. 以下、これらが正しく計算されていることを確かめていきます。具体的には、表 2 の右側 2 列の整合性 (論理変数の値と部分集合の存在性が合っているか) です。
7. $P(w, 1) = 1$ (つまり、$w \in \{0, 3\}$) とします。注意 12.4 の 2 によって、$P(w, 2) = 1$ は正しく計算されています。なお、『$\sum_{i \in S_1} a_i = w$ かつ $S_1 \subseteq I_1 = \{1\}$』を満たす具体的な $S_1 \subseteq I_1 \subseteq I_2$ は $S_1^1 = \emptyset = S_2^1 \subseteq I_2$ と $S_1^2 = \{1\} = S_2^2 \subseteq I_2$ です。
8. $P(w, 1) = 0$ (つまり、$w \in \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$) とします。
   (a) $P(w - a_2, 1)\,(= P(w - 2, 1)) = 1$ のとき
   - $P(w, 2) = 1$ かつ $w \geq 2$ です。
   - 一方、$m = 1$ の結果から $w = 2$ または $w = 5$ です。
   - $w = 2$ (つまり $P(2, 2) = 1$) ならば $P(w - a_2, 1) = P(w - 2, 1) = P(0, 1) = 1$ で、$S_1^1 = \emptyset \subseteq I_1$ に対して $\sum_{i \in S_1^1} a_i = 0$ です。このとき $S_1^1 \cup \{2\} = \{2\} = S_2^3 \subseteq I_2$ に対して $\sum_{i \in S_2^3} a_i = a_2 = 2$ です。
   - $w = 5$ (つまり $P(5, 2) = 1$) ならば $P(w - a_2, 1) = P(w - 2, 1) = P(3, 1) = 1$ で、$S_1^2 = \{1\} \subseteq I_1$ に対して $\sum_{i \in S_1^2} a_i = a_1 = 3$ です。このとき $S_1^2 \cup \{2\} = \{1, 2\} = S_2^4 \subseteq I_2$ に対し

て $\sum_{i \in S_2^4} a_i = a_1 + a_2 = 5$ です。

(b) $P(w - a_2, 1)\,(= P(w-2,1)\,) = 0$ のとき

- $P(w,2) = 0$ です。
- 一方、$m = 1$ の結果と上述の 7 および 8 (a) の結果から $w \in \{1,4,6,7\}$ です．I_2 の 4 つの部分集合は $P(w,2) = 1$ (つまり $w \in \{0,2,3,5\}$) の場合にすべて出現していますので、$w \in \{1,4,6,7\}$ に対して『$\sum_{i \in S} a_i = w$ かつ $S \subseteq I_2$』を満たす S は存在しません。

9. 以上により、$m = 2$ のときに $0 \le w \le 7$ なる w について $P(w,m)$ は正しく計算されています (表 2 の右側 2 列を参照)。

1.5.3　$m = 3$ のとき

$m = 2$ の結果を利用して、$m = 3$ の場合にも $P(w,m)$ が正しく計算されていることを示します。

1. 探索対象は $I_3 = \{1,2,3\}$ の 8 $(2 =^3)$ 個の部分集合で、それらは $S_3^1 = \emptyset$, $S_3^2 = \{1\}$, $S_3^3 = \{2\}$, $S_3^4 = \{3\}$, $S_3^5 = \{1,2\}$, $S_3^6 = \{1,3\}$, $S_3^7 = \{2,3\}$, $S_3^8 = \{1,2,3\}$ です。
2. $P(w,3) = P(w,2) \lor P(w-a_3,2)$ $(a_3 = 6)$ です。
3. $P(w,2)$, $P(w-a_3,2)\,(w - a_3 = w - 6 \le 1)$ はすべて正しく計算されています。
4. 論理変数 P の定義から、$0 \le w \le 5$ ならば $P(w-a_3,2)\,(= P(w-6,2)) = 0$ ですので、$P(w,3) = P(w,2)$ です。
5. $P(w,3)$ の値は表 3 の右から 2 列目になります。なお、

$$\{a_1 = 3,\, a_2 = 2,\, a_3 = 6,\, a_4 = 5\},\, n = 4,\, b = 7; \quad 0 \le w \le 7,\, 1 \le m \le 2$$

です。

表 3　$P(w,3) = P(w,2) \lor P(w-a_3,2)\,(a_3 = 6)$ の値

w	$P(w,2)$	$S_2^j\,(\subseteq I_2)$	$w - a_3$	$P(w-a_3,2)$	S_2^j	$P(w,3)$	$S_3^j\,(\subseteq I_3)$
0	1	$\emptyset$	-6	0		1	$\emptyset$
1	0		-5	0		0	
2	1	$\{2\}$	-4	0		1	$\{2\}$
3	1	$\{1\}$	-3	0		1	$\{1\}$
4	0		-2	0		0	
5	1	$\{1,2\}$	-1	0		1	$\{1,2\}$
6	0		0	1		1	$\{3\}$
7	0		1	0		0	

6. 以下、これらが正しく計算されていることを確かめていきます。具体的には、表 3 の右側 2 列の整合性です。
7. $P(w,2) = 1$ (つまり、$w \in \{0,2,3,5\}$) とします。$P(w,3) = 1$ です。注意 12.4 の 2 によって $P(w,3)$ は正しく計算されています。なお、『$\sum_{i \in S_2} a_i = w$ かつ $S_2 \subseteq I_2 = \{1,2\}$』を満たす $S_2 \subseteq I_2 \subseteq I_3$ は具体的には $S_2^1 = \emptyset\,(= S_3^1)$、$S_2^2 = \{1\}\,(= S_3^2)$、$S_2^3 = \{2\}\,(= S_3^3)$、$S_2^4 = \{1,2\}\,(= S_3^5)$ です。

8. $P(w,2)=0$ (つまり $w\in\{1,4,6,7\}$) とします。
   (a) $P(w-a_3,2)\,(=P(w-6,2)\,)=1$ のとき
      - $P(w,3)=1$ かつ $w=6$ です。
      - 一方、$m=2$ の結果から $P(w-6,2)=P(0,2)=1$ は正しく計算されており、$S_2^1=\emptyset$ に対して $\sum_{i\in S_2^1} a_i=0$ です。このとき $S_2^1\cup\{3\}=\{3\}=S_3^4\subseteq I_3$ に対して $\sum_{i\in S_3^4} a_i=a_3=6$ です。
   (b) $P(w-a_3,2)\,(=P(w-6,2)\,)=0$ のとき
      - $P(w,3)=0$ かつ $w\in\{1,4,7\}$ です。
      - ここで、『$\sum_{i\in S_3} a_i=w$ かつ $S_3\subseteq I_3$』を満たす S_3 が存在すると仮定してみましょう。
      - $P(w,2)=0$ ですので、$m=2$ の結果から『$\sum_{i\in S'} a_i=w$ かつ $S'\subseteq I_2$』を満たす S' は存在しません。したがって、$3\in S_3$ です。すなわち、$S_3-\{3\}\subseteq I_3-\{3\}=I_2$ です。
      - このとき $\sum_{i\in S_3-\{3\}} a_i=w-a_3\,(\geq 0)$ ですので、$m=2$ の結果から $P(w-a_3,2)=1$ となり、これは矛盾です。
      - したがって、$w\in\{1,4,7\}$ について『$\sum_{i\in S_3} a_i=w$ かつ $S_3\subseteq I_3$』を満たす S_3 は存在しません。
9. 以上により、$m=3$ のときに $0\leq w\leq 7$ なる w について $P(w,m)$ は正しく計算されています (表 3 の右側 2 列を参照)。

1.5.4 $m=4$ のとき

$m=3$ の結果を利用して、$m=4$ の場合にも $P(w,m)$ が正しく計算されていることを示します。

1. 探索対象は以下に示す $I_4=\{1,2,3,4\}$ の $16\,(=2^4)$ 個の部分集合です。
   $S_4^1=\emptyset\,(=S_3^1),\ S_4^2=\{1\}\,(=S_3^2),\ S_4^3=\{2\}\,(=S_3^3),\ S_4^4=\{3\}\,(=S_3^4),\ S_4^5=\{4\},$
   $S_4^6=\{1,2\}\,(=S_3^5),\ S_4^7=\{1,3\}\,(=S_3^6),\ S_4^8=\{1,4\},\ S_4^9=\{2,3\}\,(=S_3^7),\ S_4^{10}=\{2,4\},$
   $S_4^{11}=\{3,4\},\ S_4^{12}=\{1,2,3\}\,(=S_3^8),\ S_4^{13}=\{1,2,4\},\ S_4^{14}=\{1,3,4\},$
   $S_4^{15}=\{2,3,4\},\ S_4^{16}=\{1,2,3,4\}$
2. $P(w,4)=P(w,3)\vee P(w-a_4,3)$ $(a_4=5)$ です。
3. $P(w,3),\,P(w-a_4,3)\,(w-a_4=w-5\leq 2)$ はすべて正しく計算されています。
4. 論理変数 P の定義から、$0\leq w\leq 4$ ならば $P(w-a_4,3)\,(=P(w-5,3)\,)=0$ ですので、$P(w,4)=P(w,3)$ です。
5. $P(w,4)$ の値は表 4 の右から 2 列目になります。なお、
$$\{a_1=3,\,a_2=2,\,a_3=6,\,a_4=5\},\,n=4,\,b=7;\quad 0\leq w\leq 7,\,1\leq m\leq 2$$
   です。
6. 以下、これらが正しく計算されていることを確かめていきます。具体的には、表 4 の右側 2 列の整合性です。
7. $P(w,3)=1$ (つまり、$w\in\{0,2,3,5,6\}$) とします。$P(w,4)=1$ です。注意 12.4 の 2 によって $P(w,4)$ は正しく計算されています。なお、『$\sum_{i\in S_3} a_i=w$ かつ $S_3\subseteq I_3=\{1,2,3\}$』を満たす $S\subseteq I_3\subseteq I_4$ は具体的には $S_3^1=\emptyset\,(=S_4^1)$、$S_3^2=\{1\}\,(=S_4^2)$、$S_3^3=\{2\}\,(=S_4^3)$、$S_3^4=\{3\}\,(=S_4^4)$、$S_3^5=\{1,2\}\,(=S_4^6)$ です。

表 4　$P(w,4) = P(w,3) \vee P(w-a_4,3)\,(a_4 = 5)$ の値

w	$P(w,3)$	$S_3^j\,(\subseteq I_3)$	$w-a_4$	$P(w-a_4,3)$	S_3^j	$P(w,4)$	$S_4^j\,(\subseteq I_4)$
0	1	$\emptyset$	-5	0		1	$\emptyset$
1	0		-4	0		0	
2	1	$\{2\}$	-3	0		1	$\{2\}$
3	1	$\{1\}$	-2	0		1	$\{1\}$
4	0		-1	0		0	
5	1	$\{1,2\}$	0	1		1	$\{1,2\}$
6	1	$\{3\}$	1	0		1	$\{3\}$
7	0		2	1		1	$\{2,4\}$

8. $P(w,3) = 0$ (つまり $w \in \{1,4,7\}$) とします。
   (a) $P(w-a_4,3)\,(= P(w-5,3)\,) = 1$ のとき
   - $P(w,4) = 1$ かつ $w = 7$ です。
   - 一方、$m = 3$ の結果から $P(w-5,3) = P(2,3) = 1$ は正しく計算されており、$S_3^3 = \{2\}$ に対して $\sum_{i \in S_3^3} a_i = a_2 = 2$ です。このとき $S_3^3 \cup \{4\} = \{2,4\} = S_4^{10} \subseteq I_4$ に対して $\sum_{i \in S_4^{10}} a_i = a_2 + a_4 = 2 + 5 = 7$ です。

   (b) $P(w-a_4,3)\,(= P(w-5,3)\,) = 0$ のとき
   - $P(w,4) = 0$ かつ $w \in \{1,4\}$ です。
   - ここで、『$\sum_{i \in S_4} a_i = w$ かつ $S_4 \subseteq I_4$』を満たす S_4 が存在すると仮定してみましょう。
   - $P(w,3) = 0$ ですので、$m = 3$ の結果から『$\sum_{i \in S'} a_i = w$ かつ $S' \subseteq I_3$』を満たす S' は存在しません。したがって、$4 \in S_4$ です。すなわち、$S_4 - \{4\} \subseteq I_4 - \{4\} = I_3$ です。
   - このとき $\sum_{i \in S_4 - \{4\}} a_i = w - a_4\,(\geq 0)$ ですので、$m = 3$ の結果から $P(w-a_4,3) = 1$ となり、これは矛盾です。
   - したがって、$w \in \{1,4,7\}$ について『$\sum_{i \in S_4} a_i = w$ かつ $S_4 \subseteq I_4$』を満たす S_4 は存在しません。
9. 以上により、$m = 4$ のときに $0 \leq w \leq 7$ なる w について $P(w,m)$ は正しく計算されています (表 4 の右側 2 列を参照)。
10. 表 4 より $P(7,4) = 1$ ですので、『$\sum_{i \in S} a_i = 7 = b$ かつ $S \subseteq I_4$』を満たす S が存在します。出力は YES です。なお、具体的な部分集合は添字集合としては $S_4^{10} = \{2,4\} \subseteq I_4$ であり、要素の集合としては $\{a_2, a_4\} = \{2,5\}$ です。

1.5.5　ここまでのまとめ

ここまで例題 12.1 について、$0 \leq w \leq 7\,(= b)$, $1 \leq m \leq 4\,(= n)$ なる w, m について $P(w,m)$ が正しく計算されていることの証明を述べてきました。$0 \leq w \leq b\,(= 7)$, $1 \leq m \leq n\,(= 4)$ なる w, m についての論理変数 $P(w,m)$ の値を表 5 にまとめておきます。

ここまで示した証明は以下の形なっています。

表 5　例題 12.1 における $P(w,m)$ の値

w	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
2	0	1	1	1
3	1	1	1	1
4	0	0	0	0
5	0	1	1	1
6	0	0	1	1
7	0	0	0	1

- $m=1$ のときに、$0 \leq w \leq 7\,(=b)$ なる w について $P(w,1)$ が正しく計算されていることを示す。(このとき、$P(w-a_2,1)$ も正しく計算されている。)
- $2 \leq m \leq n = 4$ のときに、$0 \leq w \leq 7\,(=b)$ なる w について $P(w,m-1)$ が正しく計算されている (したがって、$P(w-a_k,m-1)$ も正しく計算されている) ならば、$P(w,m)$ が正しく計算されていることを示す。

すなわち、m に関する数学的帰納法の形式になっています。繰り返しますと以下の形です。

(帰納法のベース)　$m=1$ のときに、$0 \leq w \leq b = 7$ なる w について $P(w,1)$ が正しく計算されていることを示す。(このとき、$P(w-a_2,1)$ も正しく計算されている。)

(帰納法の仮定)　$2 \leq m \leq n = 4$ のとき、$0 \leq w \leq b = 7$ なる w について $P(w,m-1)$ が正しく計算されている (したがって、$P(w-a_m,m-1)$ も正しく計算されている) と仮定する。

帰納ステップ　$2 \leq m \leq n = 4$ のとき、(この仮定の下で) $0 \leq w \leq b = 7$ なる w について $P(w,m)$ が正しく計算されていることを示す。

このあと、部分和問題の解法として提案した論理変数 $P(w,m)$ が $0 \leq w \leq b$, $1 \leq m \leq n$ なる w, m について正しく計算されていることを m に関する数学的帰納法で一般的に証明します。

1.6　$P(w,m)$ に対する漸化式の正当性

ここで部分和問題と述語 $P(w,m)$ の定義をもう一度書いておきます。

部分和問題

(入力) n 個の正の整数 の集合 $\{a_1 \cdots, a_n\}$, 目標値 b

(出力) 以下を満たす添字集合 S_n が存在するとき YES；そうでないときは NO：

$$\sum_{i \in S_n} a_i = b \text{ かつ } S_n \subseteq I_n = \{1, \cdots, n\}$$

述語 (初期値設定と論理式)

($m=1$ のとき)

$P(0,1)=1,\ P(a_1,1)=1\,(a_1=3)$

$P(w,1)=0$ ($1 \le w \le b$ かつ $w \ne a_1$ なるすべての整数 w について)

($2 \le m \le n$ のとき)

$P(w,m)=P(w,m-1) \vee P(w-a_m,m-1)$ ($0 \le w \le b$ なるすべての整数 w について)

(ここで、$\vee$ は「または」を表す)

($w<0$ のとき)

$P(w,m)=0$ ($1 \le m \le n$ なるすべての整数 m について)

これから、$0 \le w \le b,\ 1 \le m \le n$ なるすべての整数 $w,\ m$ について $P(w,m)$ は正しく計算されることを数学的帰納法で証明していきます。

1.6.1 帰納法のベース: $m=1$ のとき

1. $m=1$ のときの $P(w,m)$ の値の設定は

   $P(0,1)=1,\ P(a_1,1)=1$

   $P(w,1)=0$ ($1 \le w \le b$ かつ $w \ne a_1$ なるすべての整数 w について)

   です。
2. 探索対象の添字集合は $I_1=\{1\}$ で、I_1 に含まれる部分集合は $\emptyset$ と I_1 自身です。 このとき $P(0,1)=1$ および $P(a_1,1)=1$ について、それぞれ

   $$\sum_{i\in\emptyset} a_i = 0 \qquad \text{および} \qquad \sum_{i\in I_1} a_i = a_1$$

   が成り立ちます。
3. 次に、$1 \le w \le b$ かつ $w \ne a_1$ なる整数 w に着目します。$P(w,m)=0$ です。
4. このとき、『$\sum_{i\in S} a_i = w$ かつ $S \subseteq I_1$』を満たす S が存在すると仮定してみましょう。$S=\emptyset$ または $S=I_1$ のいずれかですが、上述の通り $\sum_{i\in\emptyset} a_i = 0$ または $\sum_{i\in I_1} a_i = a_1$ で、「$1 \le w \le b$ かつ $w \ne a_1$」なる条件に矛盾します。
5. したがって、$1 \le w \le b$ かつ $w \ne a_1$ なる w については『$\sum_{i\in S} a_i = w$ かつ $S \subseteq I_1$』を満たす S は存在しません。
6. 以上により、$m=1$ のときに $0 \le w \le b$ なる w について $P(w,m)$ は正しく計算されています。

1.6.2 帰納法の仮定と帰納ステップ: $2 \le m \le n$ のとき

(**帰納法の仮定**) $2 \le m \le n$ のとき、$w \le b$ ならば $P(w,m-1)$ が正しく計算されている (したがって $P(w-a_m,m-1)$ も正しく計算されている) と仮定します。

(**帰納ステップ**)

1. $P(w,m-1)=1$ のとき
   - このとき $P(w,m)=1$ かつ $w \ge 0$ です。
   - 一方、帰納法の仮定より、『$\sum_{i\in S_{m-1}} a_i = w$ かつ $S_{m-1} \subseteq I_{m-1}$』を満たす S_{m-1} が存在します。$S_m \leftarrow S_{m-1}$ とすれば $S_m \subseteq I_{m-1} \subseteq I_m$ ですので、『$\sum_{i\in S_m} a_i = w$ かつ $S_m \subseteq I_m$』を満たす S_m が存在します。

2. $P(w, m-1) = 0$ のとき
   (a) $P(w-a_m, m-1) = 1$ のとき
      - このとき $P(w, m) = 1$ かつ $w \geq a_m > 0$ です。
      - 一方、帰納法の仮定によって『$\sum_{i \in S_{m-1}} a_i = w - a_m$ かつ $S_{m-1} \subseteq I_{m-1}$』を満たす S_{m-1} が存在します。$S_m \leftarrow S_{m-1} \cup \{m\}$ とすれば『$\sum_{i \in S_m} a_i = \sum_{i \in S_{m-1}} a_i + a_m = w - a_m + a_m = w$ かつ $S_m \subseteq I_m$』を満たす S_m が存在します。

   (b) $P(w-a_m, m-1) = 0$ のとき
      - このとき $P(w, m) = 0$ です。
      - $w < 0$ ならば、$a_i > 0\,(\,i \in I_n\,)$ より、『$\sum_{i \in S_m} a_i = w$ かつ $S_m \subseteq I_m$』を満たす S_m は存在しません。
      - $w \geq 0$ とします。ここで、『$\sum_{i \in S_m} a_i = w$ かつ $S_m \subseteq I_m$』を満たす S_m が存在すると仮定してみましょう。
      - $P(w, m-1) = 0$ ですので、帰納法の仮定から『$\sum_{i \in S'} a_i = w$ かつ $S' \subseteq I_{m-1}$』を満たす S' は存在しません。したがって、$m \in S_m$ です。すなわち、$S_m - \{m\} \subseteq I_m - \{m\} = I_{m-1}$ です。
      - このとき $\sum_{i \in S_m - \{m\}} a_i = w - a_m \geq 0$ が成り立ちますので、帰納法の仮定によって $P(w-a_m, m-1) = 1$ となり、矛盾が生じます。
      - したがって、『$\sum_{i \in S_m} a_i = w$ かつ $S_m \subseteq I_m$』を満たす S_m は存在しません。

3. 以上により、$2 \leq m \leq n$ のとき、$0 \leq w \leq b$ なる w について $P(w, m)$ は正しく計算されています。

以上で、$0 \leq w \leq b,\ 1 \leq m \leq n$ なるすべての整数 w, m について $P(w, m)$ は正しく計算されることが数学的帰納法で証明されました。