グラフとアルゴリズムとプログラムのやさしいおはなし

渡邉敏正

2021 年 4 月 6 日

第 1 回

はじめに　会員の皆さんへの分かりやすく興味を引く話題を提供する、あるいは会員の皆さんが中高生あるいは大学 1〜2 年といったお孫さん達とクイズ感覚で楽しめる話題を提供する、などの意図で何回か連載記事を書いてみようかな、というのがこの記事を書き始めた理由です。物事を考えることに積極的な若い人を増やしていきたいという思いもあります。さて、どのようなことになるかわかりませんが、とりあえず始めてみます。あとでエラーを修正したり表現を変更したり、といったこともあるかもしれません。そのような気楽さが継続の原動力になると思っています。

1　ケーニヒスベルクの橋の問題

図 1 は 18 世紀初めの東プロイセンのケーニヒスベルグ（現ロシア連邦カリーニングラード）の概略図です。町の中央にプレーゲル川が流れ、２つの中島と対岸との間に７つの橋がかかっていました。当時、「どの地点から出発してもいいが、**すべての橋をちょうど１回ずつ通って出発地点に戻る**ことはできるだろうか」という問いかけが「ケーニヒスベルクの橋の問題（Königsberg bridge problem）」として知られていました。可能な通り方を片っ端からすべて試した人もいたらしく、町の人の間では「どうやら、なさそうだ」という予想が多かったようです。しかし、確かなことはわかっていませんでした。これは非常によく知られた話ですので、ご存じの方も多いと思います。ご存じの方には少しの間我慢をしていただくこととして、さて皆さんならどう考えるでしょうか。答はイエスかノーか、それはなぜか、が問いかけ（以後、「問題」と言う）です。

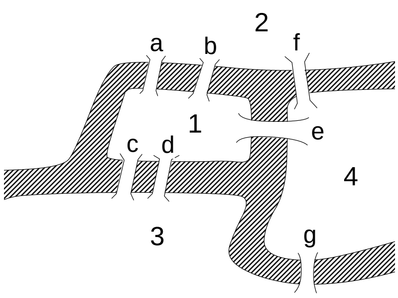

図 1　ケーニヒスベルグを流れるプレーゲル川，2 つの中島と 7 つの橋（概略図）

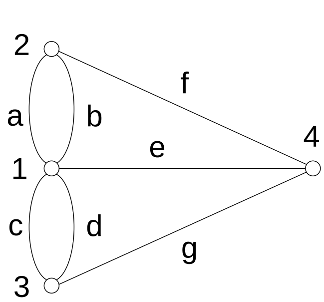

図 2　グラフモデル G_0

1.1　グラフモデル

スイスの数学者オイラー（Leonhard Euler）はこれを定式化し 1736 年に解答を与えた、と言われています。物理学や数学の幅広い領域で大きな業績が多数あります。

ここで重要なのは、どの地点（中島や岸）からどの橋をわたってどの地点に行ったか、が重要です。地点や橋の名前は識別できれば何であっても差し支えありません。そこで、図 2 のように描画してみます。ここでは、中島や岸を○（この丸を点とよびます）で表して $1, 2, \cdots$ などと整数で名前を付け、橋はつながっている地点を表す点間を結ぶ線分（辺とよびます）で書いて、アルファベットで名前を付けています。辺は、辺 a を $a = \{1, 2\}$ などと、結ぶ 2 点のペアで表します。単に $\{1, 2\}$ と書くこともあります。このような点と辺で構成された図を**グラフ** (graph) とよびます。

このようにグラフを描いてみると、たとえば図 1 で地点 1 から出発し、橋 a、地点 2、橋 f、地点 4、橋 g、地点 3、橋 d、地点 1 と辿ったことは、図 2 では、点と辺が交互に出てくる列（交代列）1, a, 2, f, 4, g, 3, d, 1 に対応します。このようなつながっている点と辺の交代列を（開始点 1 と終点 1 を結ぶ）パスとよぶことにします。今の場合は、初めと終わりが同一点ですので、特にサイクルとよぶことにします。なお、この辿り方は問題の答ではありません。逆に図 2 でのパスやサイクルと図 1 での辿り方が対応していることも見えると思います。

さて、このような元の問題に対して着目点を正確に反映する別の形に表現したものを「モデル」といいい、このような操作をモデル化とかモデリングなどといいます。図 2 ではグラフモデル G_0 という言い方をしています。

1.2　オイラーサイクル

このモデル化を考えると、ケーニヒスベルクの橋の問題は、図 2 のグラフにおいて、ある点を開始点、終点とするサイクルですべての辺をちょうど 1 回ずつ含むものがあるかどうか、を問う問題となります。このようなサイクルは**オイラーサイクル** (Euler cycle) とよばれています。同じことですが、「一筆書き」という言い方ではどうでしょうか。同じ辺を重複して書かない、とう条件は付きますが。これならば聞いたことがある方がいるかもしれません。図 2 の絵に（開始点に戻る）一筆書きがあるかどうかを尋ねていることになります。

「何だか『グラフ』とか『モデル』とかいう難しい話になってきたなー」、「そんなに難しくしないで、すべての辿り方をやてみれば答は出るのに」などと考える方もいると思います。それは当然だと思います。すべての可能な辿り方をやってみる方法（力ずくの方法（brute-force method）などということもあります）は確かに確実に答を得るための 1 つの方法です。これについては別の機会にお話するつもりですが、すべての可能な場合を試す方法で答を得るのにとんでもない時間がかかる（あるいはそのため現実的時間内には答を得ることができない）ような簡単な問題が多数あります。したがって、効率的に答を得る方法を考えることにも意義はあります。

どのような理由で答えがノーあるいはイエスなのか、を明らかにすることは、単にこの問題を解決するということだけでなく、グラフの規模（点や辺の数など）の増大に対応するとき、あるいは類似の問題さらにその他のいろいろな問題を考えていくときに大きな助けとなります。いま説明している問題はちょっとしたクイズのようなものですが、それに真剣に取り組んで成果を得たことを契機として、その後に様々な形で発展していき、現在では「グラフ理論」「グラフアルゴリズム」といった学問分野を形作っており、現実世界で遭遇する

種々の問題の解決に役立つ貴重な成果とツールを提供することにつながっています。
オイラーは、グラフにオイラーサイクルが含まれる（含まれない）条件を明確にしました。それによって、答がノーであることが確定しました。どのような条件なのだろうか、皆さん自身であるいはお孫さんと一緒に考えてみてください。
今回は以後の話題へのイントロダクションとして、ケーニヒスベルクの橋の問題を紹介しました。その解決に関する説明は別の機会に譲ることにします。